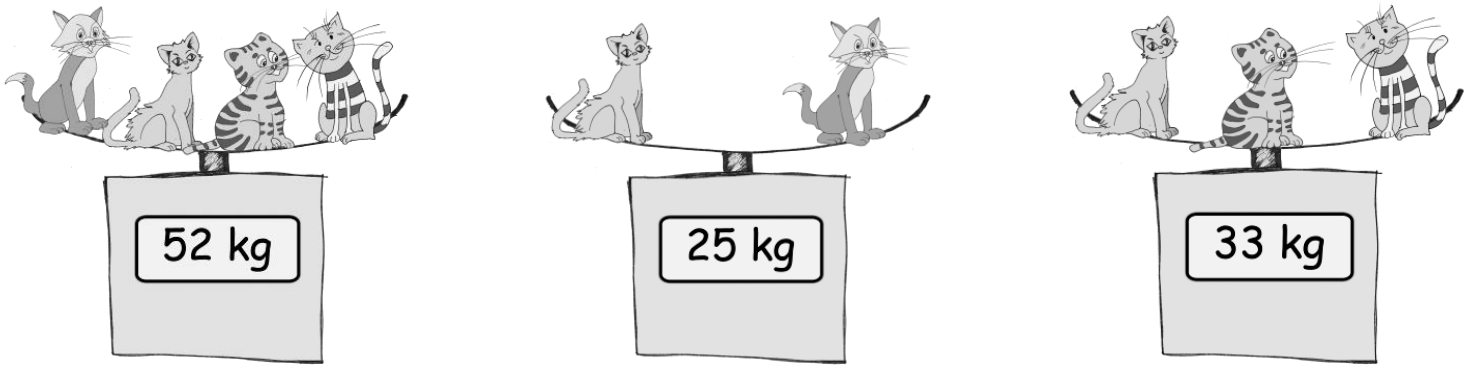
MUNI FSS Katedra psychologie

Třikrát jsme zvážili čtyři různé kočky. Podívej se na výsledky:




Spočítej, kolik váží kočka na následujícím obrázku:
Výsledek zdůvodni.

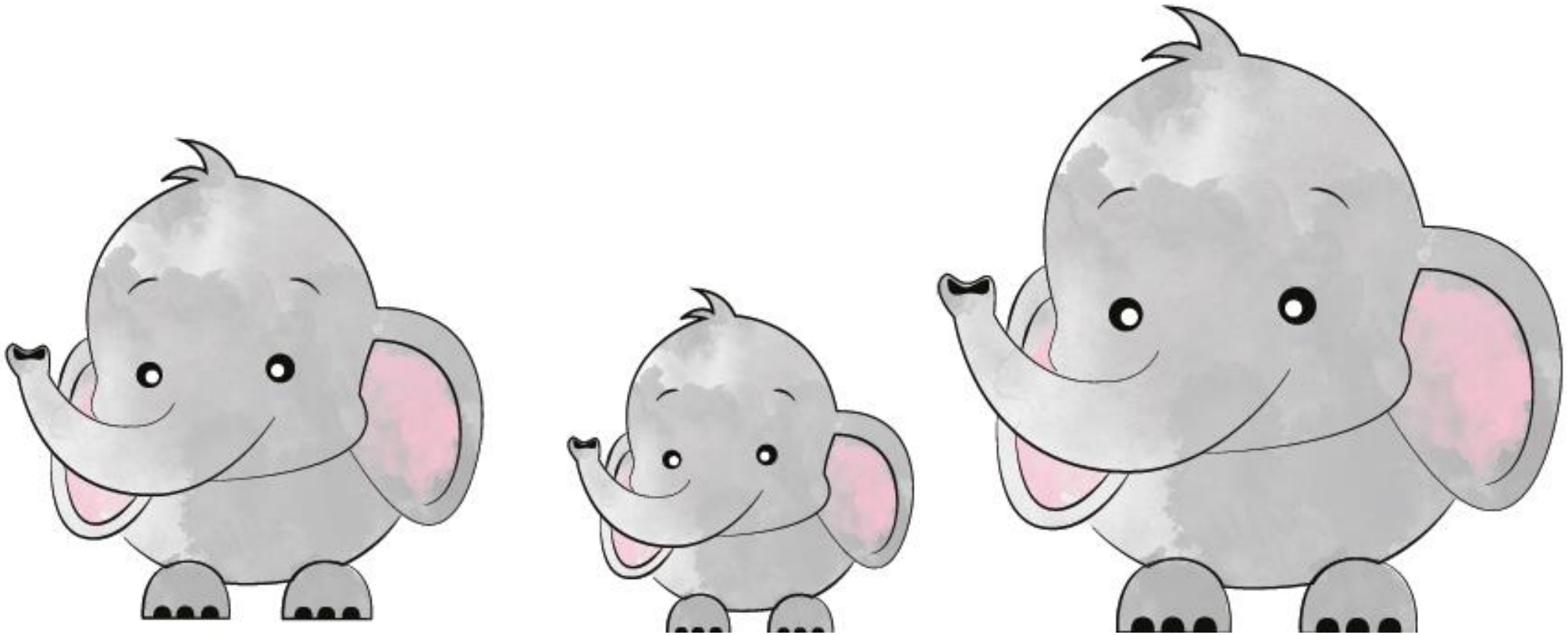
# Matematické usuzování a zpracování numerických podnětů

**Hynek Cígler** | Katedra psychologie & IVDMR FSS MU

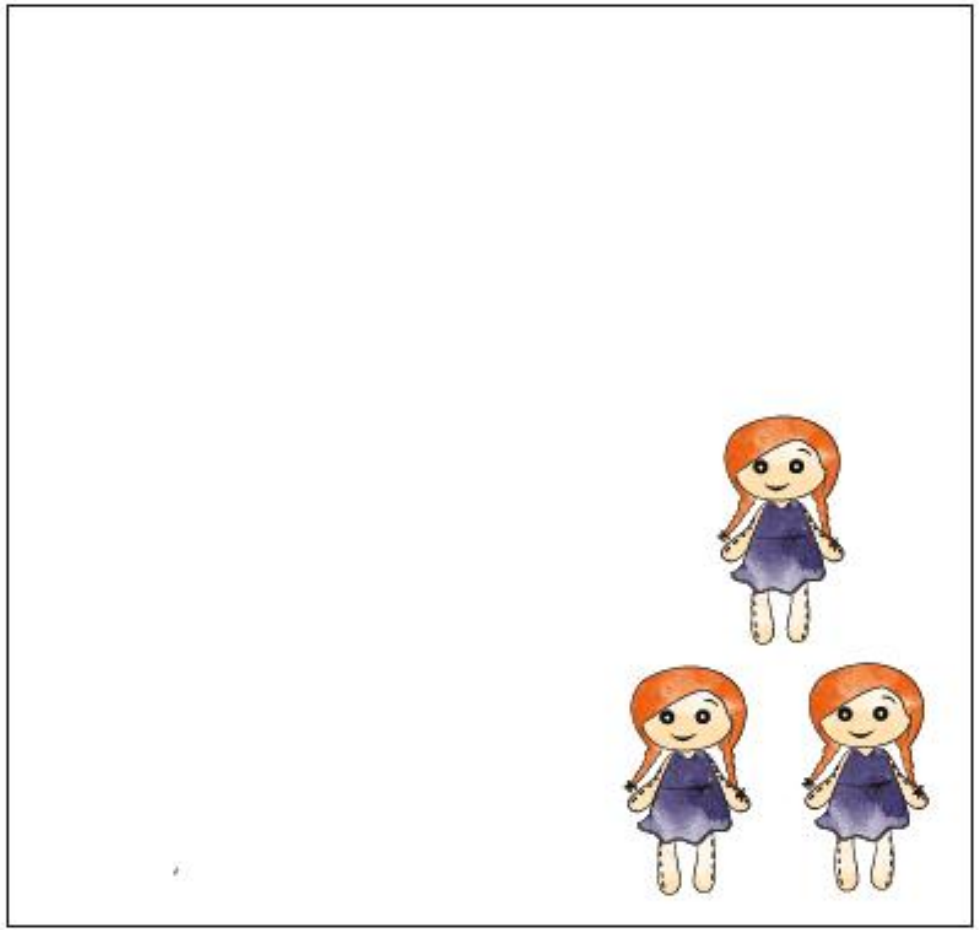
**Didakticko-matematický seminář** | 16. 4. | KMDM PedF UK

# Co to jsou matematické schopnosti?

# Kolik je tady slonů?



# Kde je více?



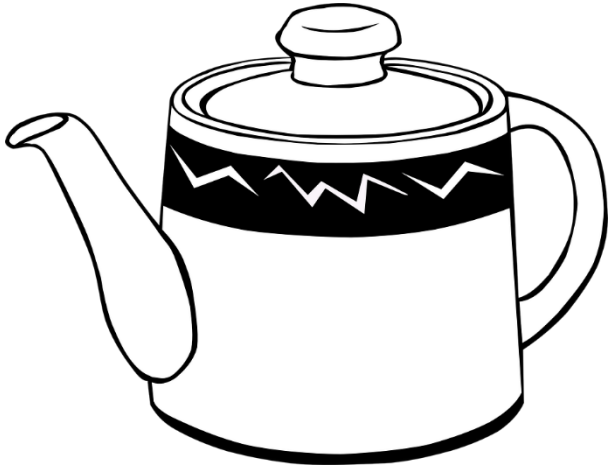
Franta má pět korun.
Petr má o dvě koruny více.
Kolik korun má Petr?

Franta má pět korun.
To je o dvě více, než má Petr.
Kolik korun má Petr?

# Umístěte na číselnou osu číslo 134

# Umístěte na číselnou osu číslo 61 v limitu 1,25 sekundy

# Do které konvice se vejde více kávy?



# Jak pokračuje číselná řada 85, 84, 83, 82… ?

Jak pokračuje číselná řada 85, 84, 83, 82… ?

Dva bagry vykopou polovinu příkopu za tři dny. Za jak dlouho vykopou celý příkop tři bagry?

$$\cos\frac{x}{2+x} = 2\pi; \quad x = ?$$

$$\cos\frac{x}{2+x} = 2\pi; \quad x = ?$$

Jaká je pravděpodobnost, že na 3 kostkách alespoň jednou z pěti hodů padne součet 14 nebo vyšší?

$$\cos\frac{x}{2+x} = 2\pi; \quad x = ?$$

Jaká je pravděpodobnost, že na 3 kostkách alespoň jednou z pěti hodů padne součet 14 nebo vyšší?

Sestrojte rovnoramenný trojúhelník se základnou c=2cm a odvěsnami a=b=4cm.

# Zdroje variability

**Intraindividuální vs. interindividuální.**

- Lokálně-homogenní konstrukty
- Lokálně-heterogenní konstrukty
- Lokálně-irelevantní konstrukty

# Rozdílné pohledy:

**Psychometrika**
interindividuální variabilita

**Kognitivní psychologie**
zpracování informace, intraindividuální variabilita

**Kognitivně-vzdělávací přístup**
správné a špatné řešení, kulturní specifika

# Psychometrický přístup

*„Psychometrics is the approximation of latent psychological processes by means of stochastic analysis at both the individual and population levels.“*

Peter Molenaar
https://www.psychometricsociety.org/content/what-psychometrics

Psychometrika je věda o měření psychických charakteristika (a též aplikovaná disciplína vytváření psychologických/didaktických aj. testů).

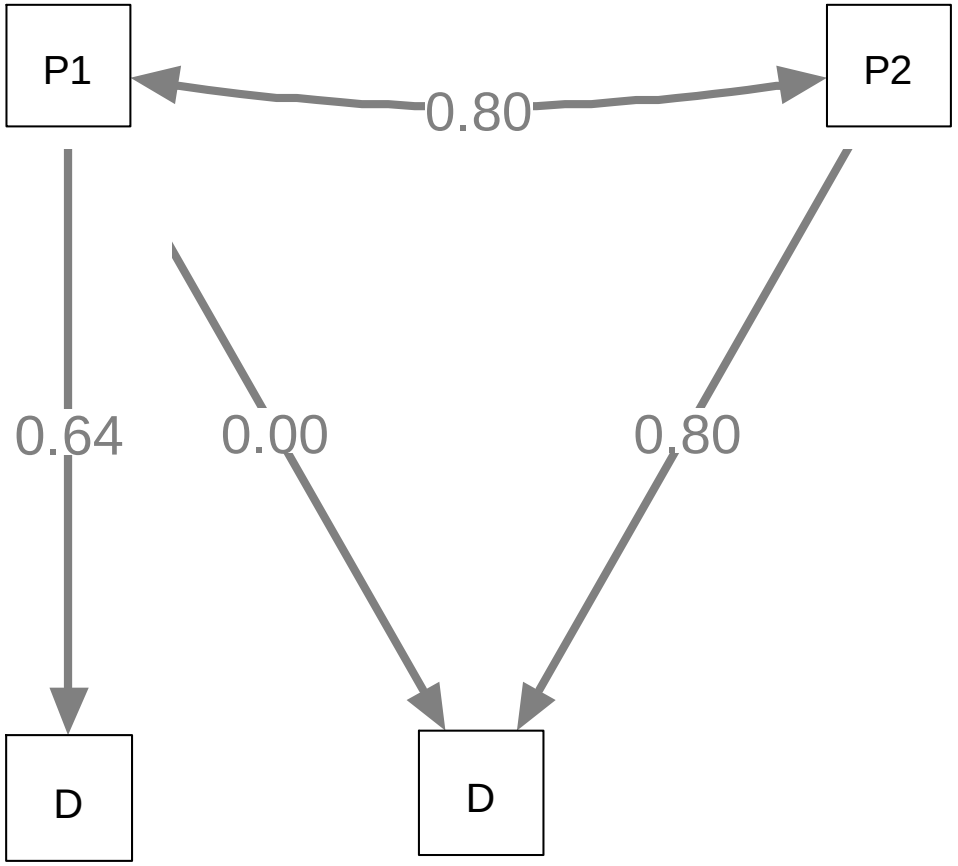
Alfred Binet
https://commons.wikimedia.org/w/index.php?title=File:Alfred_Binet.jpg&oldid=285171021

# *Vyšší matematické schopnosti…*

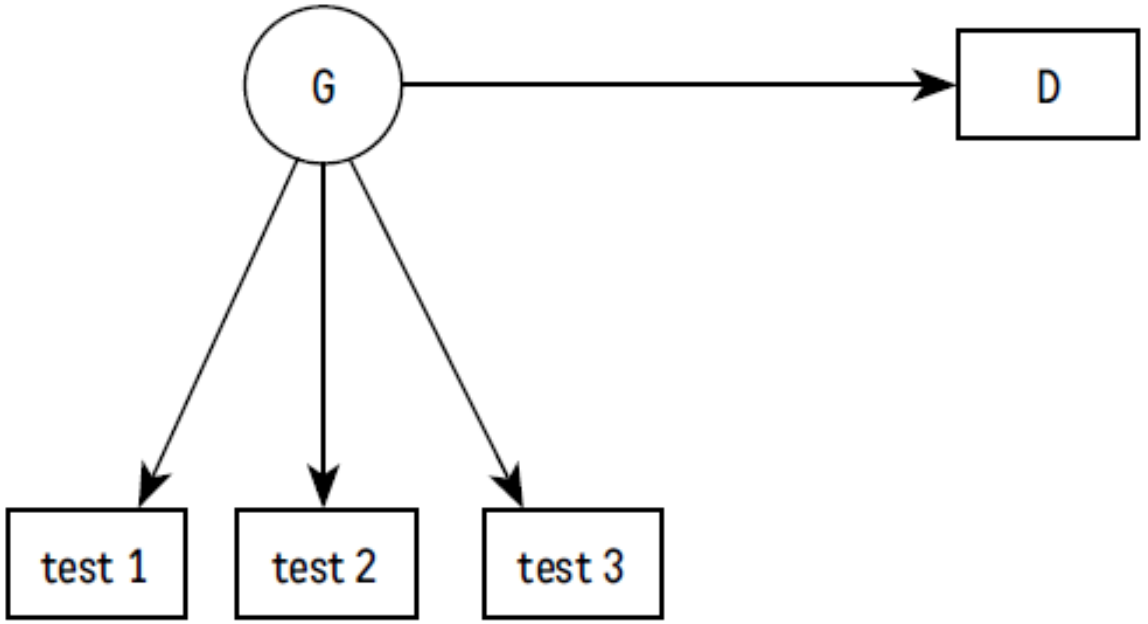
*… predikují vyšší velikost příjmu, zaměstnatelnost, kariérní postup, životní spokojenost a řadu dalších.*

- Rivera-Batiz (1992), Paglin a Rufolo (1990), Rose a Betts (2004), Parson a Bynner (2005)

# Faktorová indeterminace
# LOVE – Left (Out) Variable Error

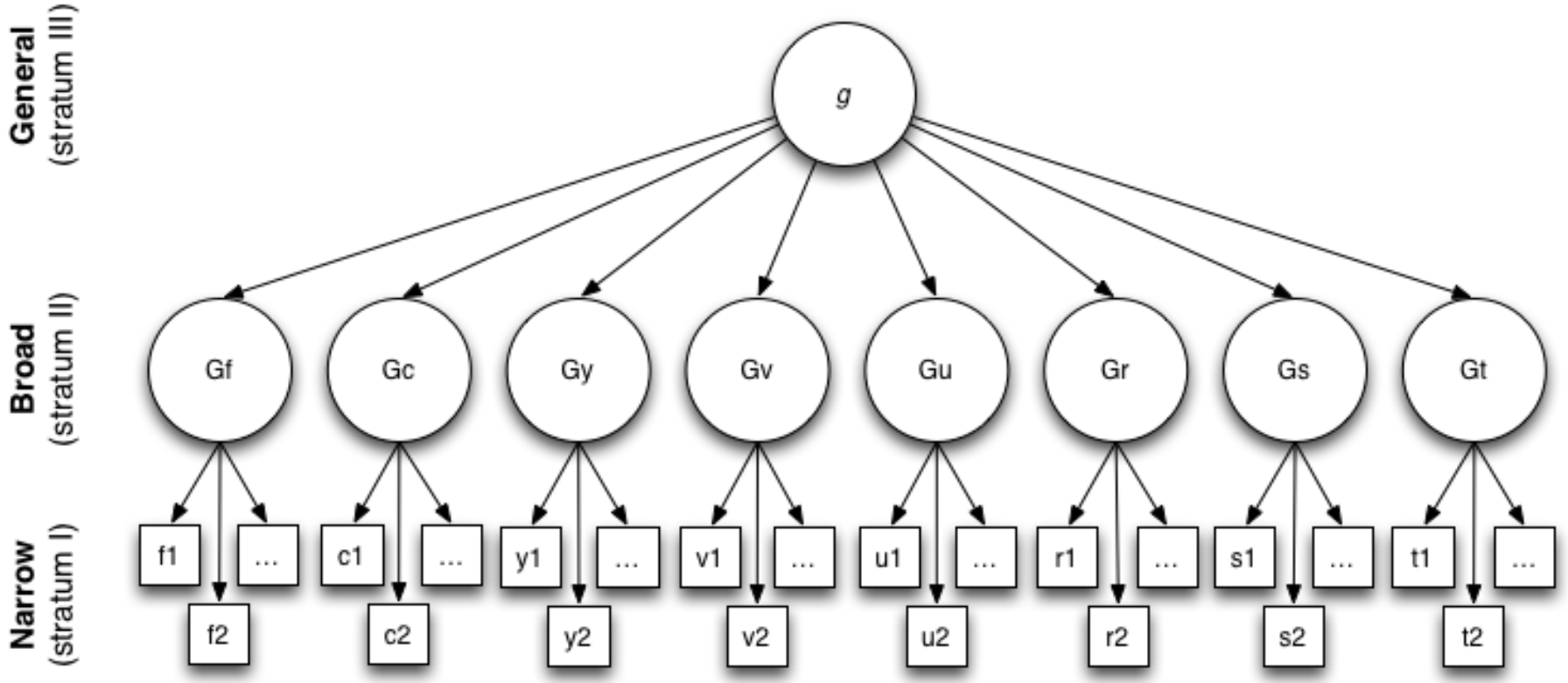


# Faktorová indeterminace
# LOVE – Left (Out) Variable Error




Cígler (2018)

# Psychometrický pohled: CHC teorie




https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Carroll_three_stratum_model_of_human_Intelligence.png

**TAB. 1: SEZNAM ŠIROKÝCH A ÚZKÝCH FAKTORŮ DLE CHC TEORIE, KTERÉ LZE OZNAČIT JAKO MATEMATICKÉ**

| široká schopnost (stratum II) | úzká schopnost (stratum I) | popis, komentář |
|---|---|---|
| Fluidní inteligence (*Gf*) | Kvantitativní usuzování (*RQ*) | Schopnost induktivních a deduktivních operací s objekty, zahrnující matematické vztahy či vlastnosti. |
| Kvantitativní vědomosti (*Gq*) | – | Hluboké a rozsáhlé vědomosti spojené s matematikou. |
| Kvantitativní vědomosti (*Gq*) | Matematické vědomosti (*KM*) | Šířka obecných znalostí matematiky. |
| Kvantitativní vědomosti (*Gq*) | Matematický výkon[a] (*A3*) | Měřený matematický výkon. |
| Rychlost zpracování (*Gs*) | Číselná zručnost[b] (*N*) | Schopnost rychlé a přesné manipulace s čísly, a to od jednoduššího počítání a rozpoznávání čísel a množství až po pokročilé sčítání, odčítání, násobení a dělení. |

Cígler (2018)

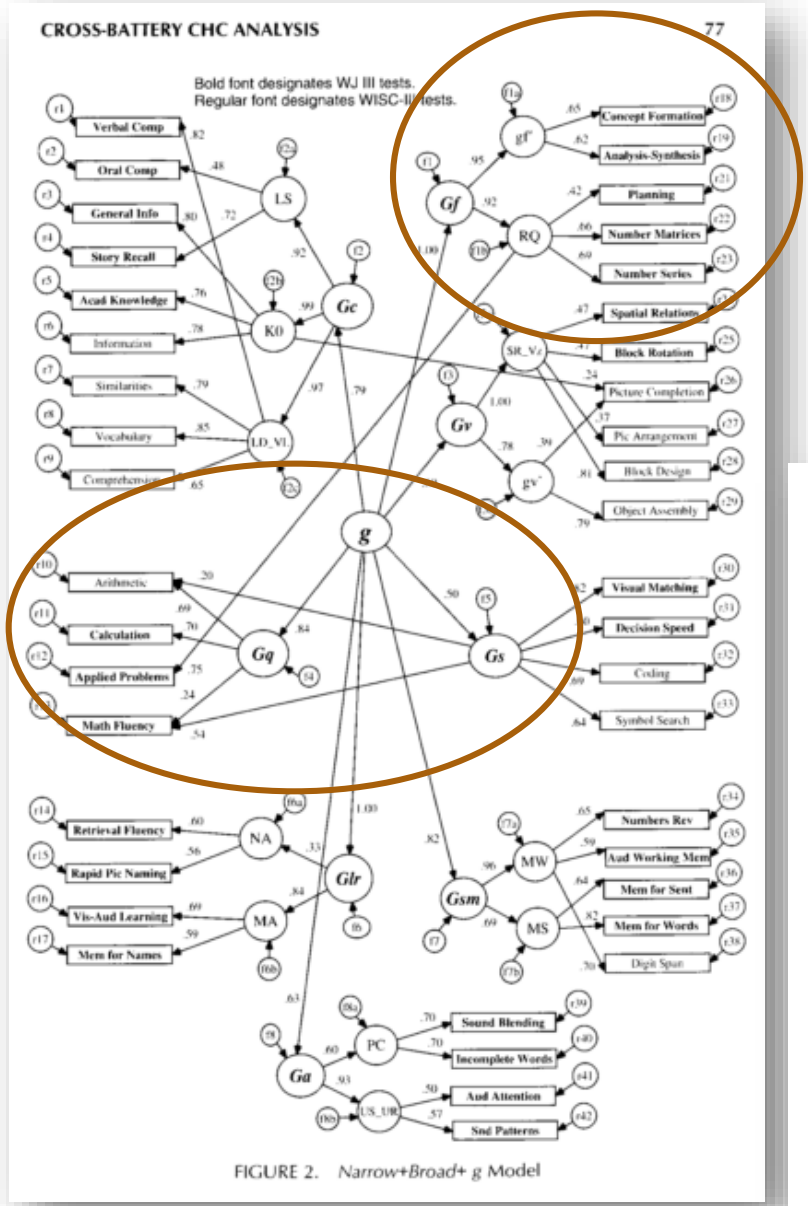
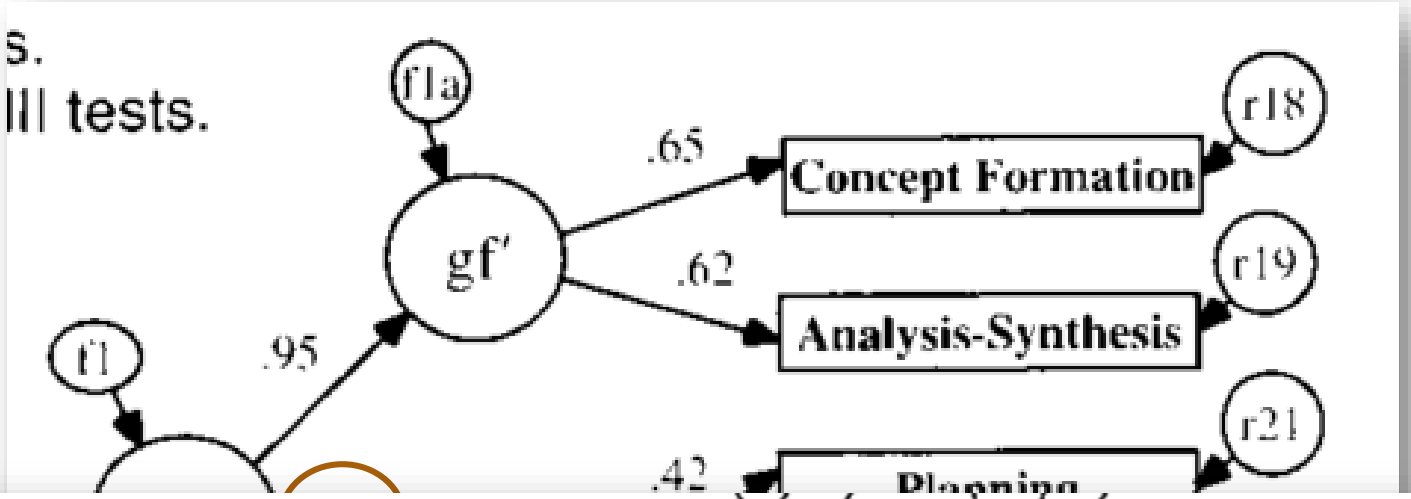
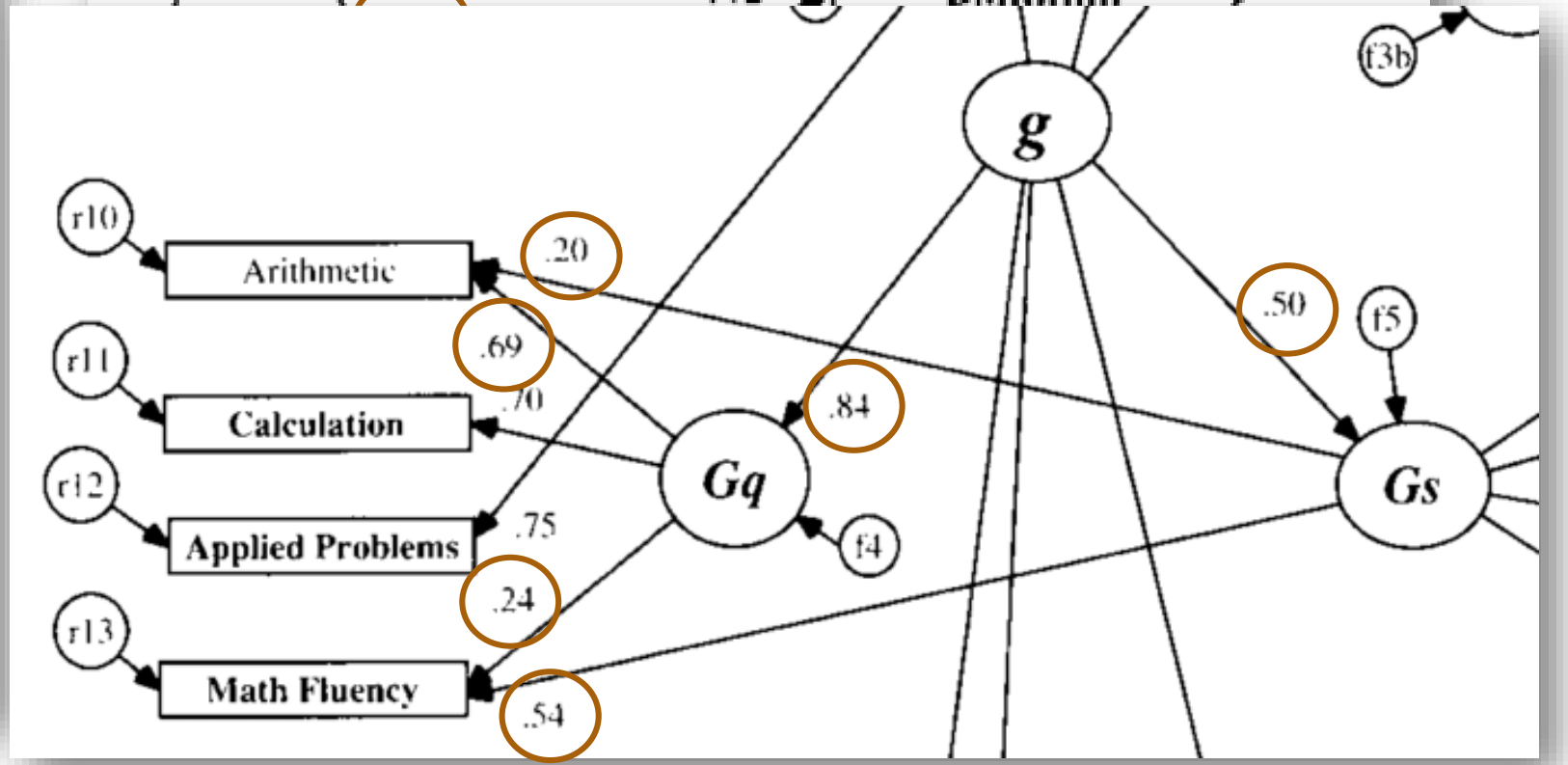


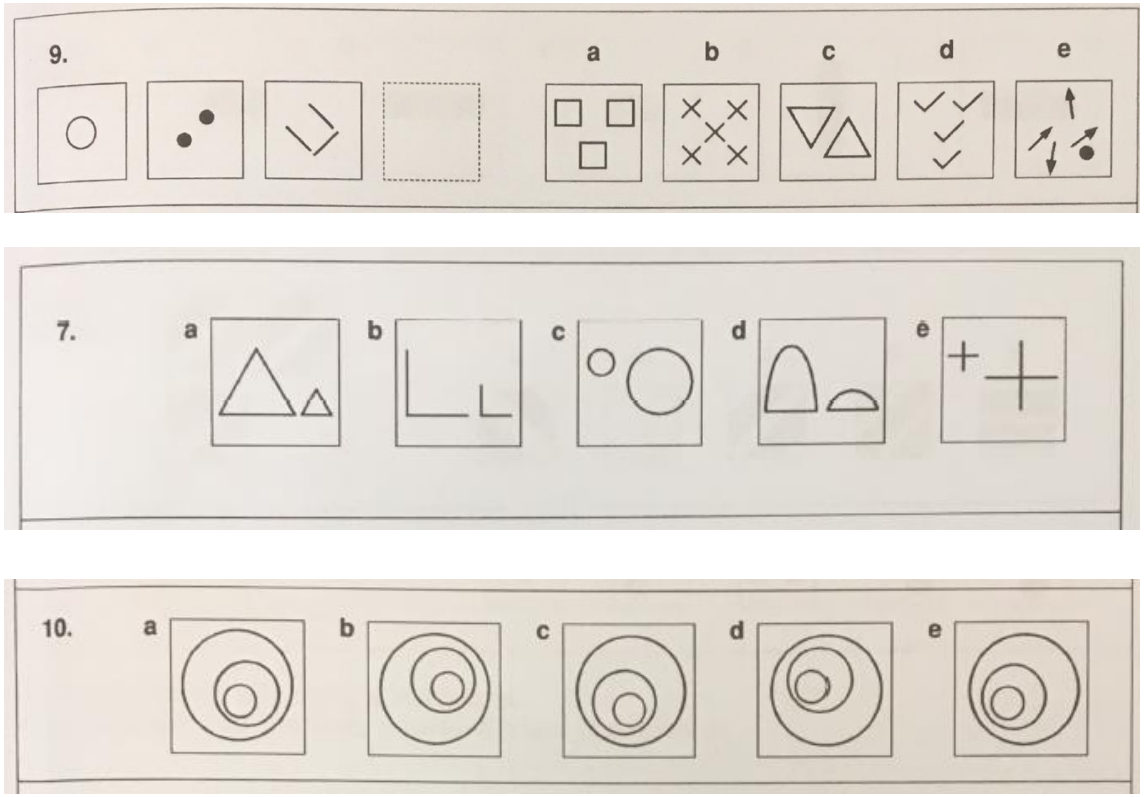

FIGURE 2. *Narrow+Broad+ g* Model




(Phelps a kol., 2005)

# *g* vs. *Gq/RQ*: CFT vs. TIM




**B5.** Čísla jsou zapsána za sebou podle určitého pravidla. Doplň čísl

18 17 15 12 8 _____

**B8.** Můžeš použít jen číslice 2, 5 a 8. Kolik dvojciferných čísel můžeš pomocí těchto číslic napsat? Zapiš je všechna.

B18. Do 3. B chodí 12 chlapců a 12 děvčat. Do keramiky chodí z této třídy 15 dětí, do souboru chodí z této třídy také 15 dětí. Každé dítě chodí aspoň do jednoho kroužku. Kolik dětí ze 3. B navštěvuje oba kroužky zároveň?

CFT 20-R **(Cattellův test fluidní inteligence)**

TIM$^{3-5}$ **(Test pro identifikaci nadaných žáků v matematice)**

# *g* vs. *Gq/RQ*: CFT vs. TIM

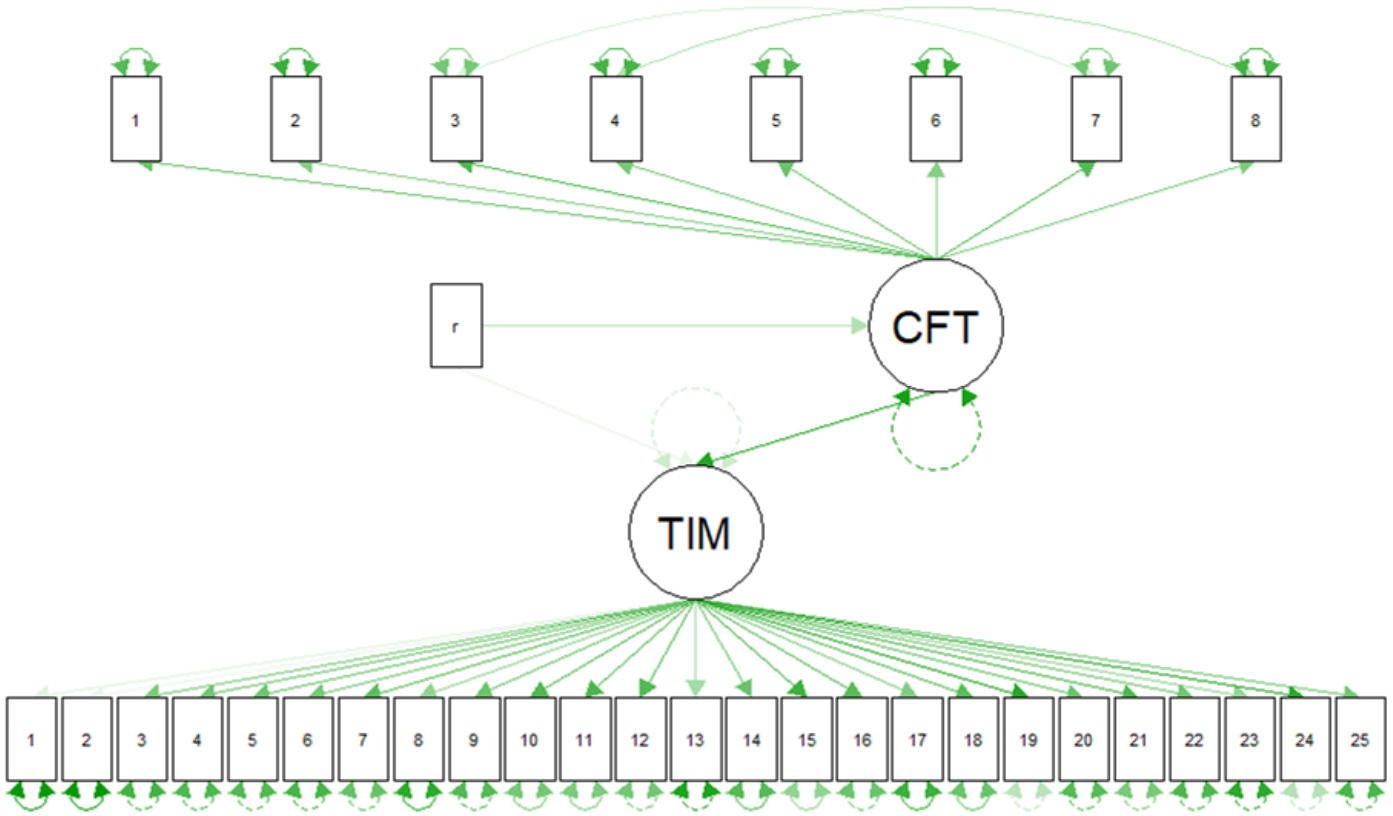
*N* = 401.

Pozorované: ***r* = 0,643**

SEM: **β = 0,867**

- Odpovídá λ = 0,92, viz dříve.
  - (Phelps a kol., 2005)
- (po kontrole věku)
  - $\beta_{TIM}$ = 0,090
  - $\beta_{CFT}$ = 0,293

- Analýza: WLSMV estimátor
  - multigroup mixed-item SEM
  - $\chi^2(1077) = 1159{,}9$, $p = 0{,}040$, *TLI* = 0,974, *RMSEA* = 0,020 s $CI_{90\%}$ = [0,005; 0,028]




Cígler, H. (2017, nepublikováno)

TAB. 2: VZTAH KOGNITIVNÍCH SCHOPNOSTÍ (DLE CHC TEORIE) A MATEMATICKÉHO VÝKONU PODLE VĚKU

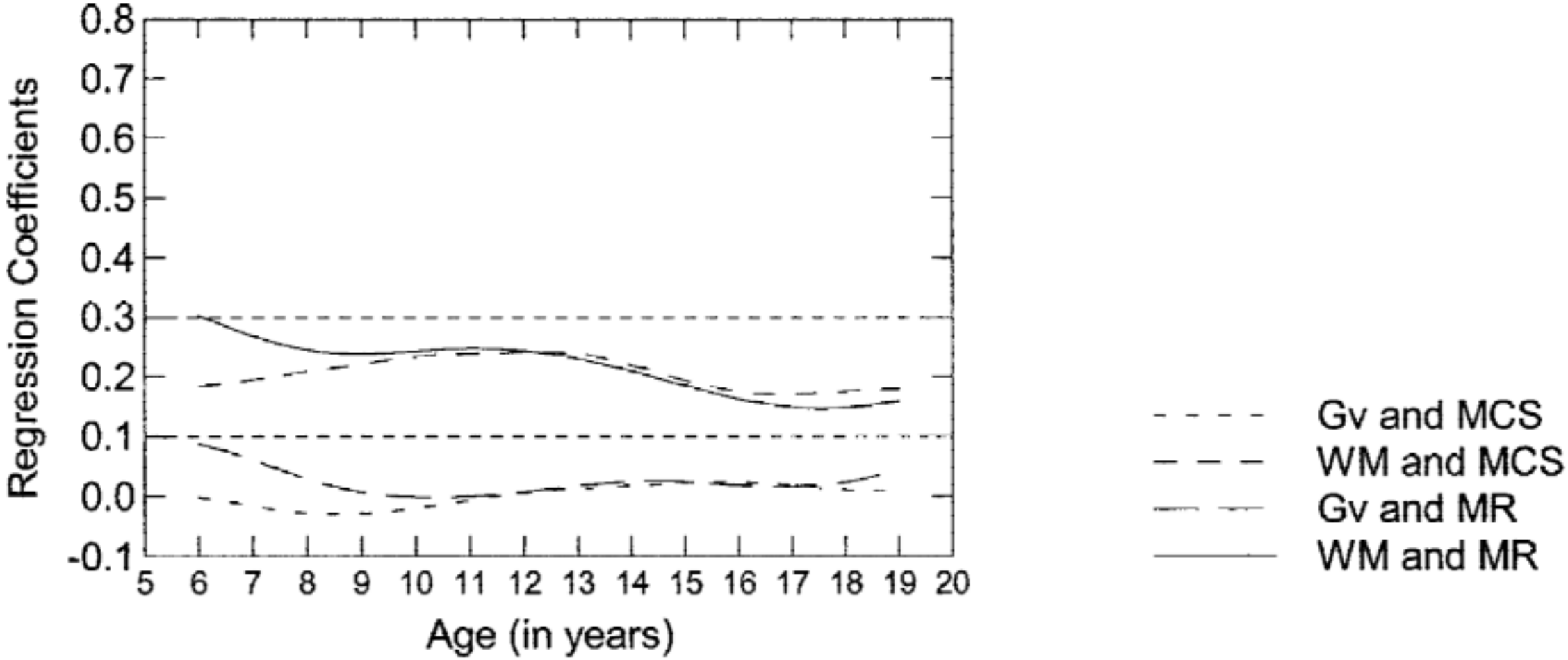
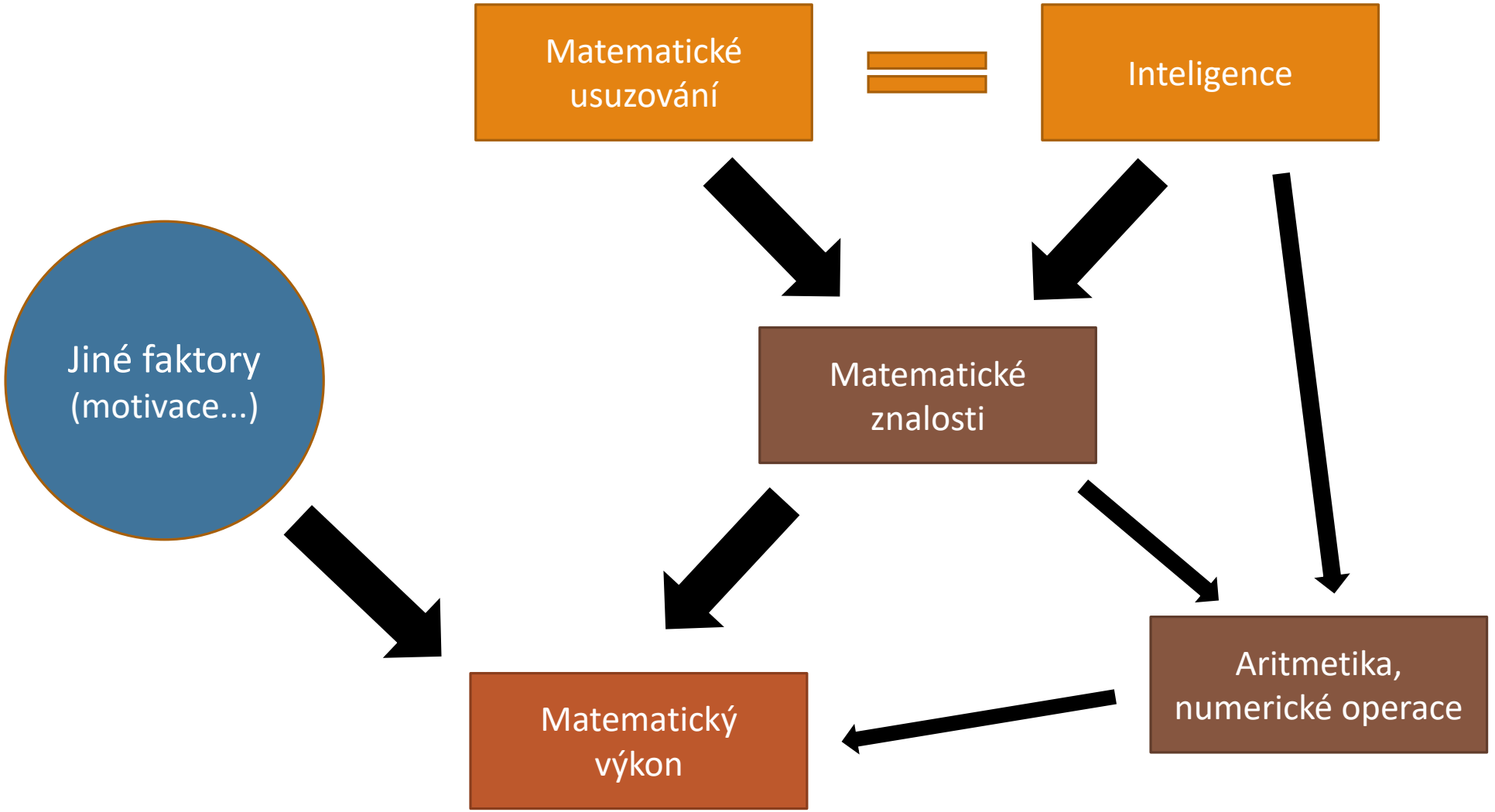



FIGURE 4. Standardized regression coefficients as a function of age for Visual-Spatial Thinking (Gv) and for Working Memory (WM) with Math Calculation Skills (MCS) and Math Reasoning (MR).

(Floyd a kol., 2003)


Matematické usuzování
Inteligence
Jiné faktory (motivace...)
Matematické znalosti
Matematický výkon
Aritmetika, numerické operace

# Kognitivně--vzdělávací přístup

Jaké jsou kognitivní procesy, které využíváme při vzdělávání v matematice?

Jaké jsou kognitivní procesy vedoucí ke správnému či chybnému řešení?

Jaké jsou nekognitivní procesy které ovlivňují pozorovaný matematický výkon?

# Matematické vzdělávání

Thorndike (1922a, 1922b): znalost výpočtu obsahu obdélníku nelze transformovat do znalosti výpočtu obsahu trojúhelníku.

Schoenfeld (1988): příliš názorná výuka zhoršuje porozumění[1].

Carbonneau a kol. (2013): metaanalýza (*n*=55) efektivity pomůcek. Zapamatování, řešení problémů, transfer znalosti.

- Míra instruování podporuje zapamatování, snižuje transfer.
- Nejefektivnější je krátká doba používání (do 14 dní), bez vlivu na transfer; dlouhá doba –negativní efekt.
- Pro transfer se efekty neliší dle oblasti matematiky, jinak ano (výhodné u zlomků, znalosti v algebře).
- Percepční bohatost podporuje transfer, naopak snižuje zapamatování a řešení problémů (a naopak).
- Různé efekty pro různě staré děti (zejm. zapamatování a konkrétní stadium).

[1] Let's ban PowerPoint in lectures – it makes students more stupid and professors more boring.

# Zapamatování (Carbonneau a kol., 2013)

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Instructional guidance | | | | | 106.5, $p < .001$ |
| High | 31 | 4,531 | 0.90 | [0.81, 0.99] | |
| Low | 22 | 2,609 | 0.19 | [0.08, 0.29] | |
| Mathematical topic | | | | | 44.5, $p < .001$ |
| Place value | 3 | 101 | $0.70_{ab}$ | [0.37, 1.04] | |
| Arithmetic | 25 | 2,387 | $0.39_{b}$ | [0.29, 0.48] | |
| Geometry | 5 | 602 | $0.57_{ab}$ | [0.37, 0.78] | |
| Fractions | 13 | 2,762 | $0.93_{a}$ | [0.78, 1.08] | |
| Algebra | 9 | 1,288 | $0.84_{a}$ | [0.65, 1.03] | |
| Perceptual richness | | | | | 36.4, $p < .001$ |
| Yes | 12 | 1,395 | 0.28 | [0.14, 0.41] | |
| No | 34 | 4,723 | 0.77 | [0.69, 0.85] | |
| Group vs. individual | | | | | 0.02, $p = .87$ |
| Individual | 5 | 481 | 0.57 | [0.31, 0.82] | |
| Group | 48 | 6,659 | 0.59 | [0.52, 0.66] | |
| Development status | | | | | 106.8, $p < .001$ |
| Preoperational | 8 | 707 | $-0.09_{a}$ | [−0.26, 0.07] | |
| Concrete | 40 | 6,109 | $0.81_{b}$ | [0.73, 0.89] | |
| Formal | 5 | 324 | $0.31_{c}$ | [0.10, 0.52] | |
| Instructional time | | | | | 7.4, $p = .02$ |
| ≤14 days | 25 | 3,133 | $0.59_{a}$ | [0.49, 0.69] | |
| 15–45 days | 15 | 1,261 | $0.35_{b}$ | [0.21, 0.49] | |
| ≥46 days | 7 | 952 | $0.49_{ab}$ | [0.28, 0.71] | |

A meta-analysis of the efficacy of teaching mathematics with concrete manipulatives (Carbonneau a kol., 2013)

# Řešení problémů (Carbonneau a kol., 2013)

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Instructional guidance | | | | | 19.1, $p < .001$ |
| High | 5 | 202 | 1.06 | [0.71, 1.42] | |
| Low | 4 | 275 | 0.04 | [−1.30, 1.39] | |
| Mathematical topic | | | | | 45.1, $p < .001$ |
| Place value | 1 | 24 | $0.48_a$ | [−0.32, 1.29] | |
| Arithmetic | 5 | 246 | $0.02_a$ | [−0.26, 0.30] | |
| Geometry | 1 | 93 | $0.72_a$ | [0.20, 1.24] | |
| Fractions | 2 | 114 | $2.50_b$ | [1.82, 3.18] | |
| Algebra | 0 | | | | |
| Perceptual richness | | | | | 15.3, $p < .001$ |
| Yes | 2 | 100 | −0.27 | [−0.72, 0.18] | |
| No | 6 | 377 | 0.80 | [0.52, 1.08] | |
| Group vs. individual | | | | | |
| Individual | 0 | | | | |
| Group | 9 | 477 | 0.46 | [0.23, 0.68] | |
| Development status | | | | | 2.2, $p = .33$ |
| Preoperational | 1 | 66 | 0.08 | [−0.58, 0.75] | |
| Concrete | 7 | 318 | 0.45 | [0.18, 0.72] | |
| Formal | 1 | 93 | 0.72 | [0.20, 1.24] | |
| Instructional time | | | | | 22.7, $p < .001$ |
| ≤14 days | 6 | 290 | $0.86_a$ | [0.56, 1.16] | |
| 15–45 days | 1 | 76 | $-0.62_b$ | [−1.17, −0.62] | |
| ≥46 days | 2 | 111 | $0.25_a$ | [−0.19, 0.69] | |

A meta-analysis of the efficacy of teaching mathematics with concrete manipulatives (Carbonneau a kol., 2013)

# Transfer znalosti (Carbonneau a kol., 2013)

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Instructional guidance | | | | | 6.7, $p = .009$ |
| High | 8 | 2,385 | 0.00 | [−0.16, 0.16] | |
| Low | 5 | 1,068 | 0.27 | [0.12, 0.43] | |
| Mathematical topic | | | | | 1.5, $p = .83$ |
| Place value | 1 | 12 | 0.33 | [−0.28, 0.96] | |
| Arithmetic | 7 | 757 | 0.16 | [0.00, 0.36] | |
| Geometry | 1 | 147 | 0.24 | [−0.15, 0.65] | |
| Fractions | 3 | 1,996 | 0.09 | [−0.14, 0.32] | |
| Algebra | 1 | 541 | 0.09 | [−0.18, 0.36] | |
| Perceptual richness | | | | | 12.2, $p < .001$ |
| Yes | 5 | 1,359 | 0.48 | [0.25, 0.62] | |
| No | 6 | 2,094 | −0.02 | [−0.23, 0.17] | |
| Group vs. Individual | | | | | |
| Individual | | | | | |
| Group | | | | | |
| Developmental Status | | | | | |
| Preoperational | | | | | |
| Concrete | 13 | 3,453 | 0.14 | [0.03, 0.26] | |
| Formal | | | | | |
| Instructional time | | | | | 3.6, $p = .06$ |
| ≤14 days | 7 | 1,625 | 0.03 | [−0.13, 0.21] | |
| 15–45 days | 6 | 1,828 | 0.22 | [0.07, 0.37] | |
| ≥46 days | | | | | |

A meta-analysis of the efficacy of teaching mathematics with concrete manipulatives (Carbonneau a kol., 2013)

# Efektivita učebních pomůcek Carbonneau a kol. (2013)

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **Transfer** | Instructional guidance | | | | 6.7, $p = .009$ |
| | High | 8 | 2,385 | 0.00 | [−0.16, 0.16] |
| | Low | 5 | 1,068 | 0.27 | [0.12, 0.43] |
| | Perceptual richness | | | | 12.2, $p < .001$ |
| | Yes | 5 | 1,359 | 0.48 | [0.25, 0.62] |
| | No | 6 | 2,094 | −0.02 | [−0.23, 0.17] |
| **Řešení** | Instructional guidance | | | | 19.1, $p < .001$ |
| | High | 5 | 202 | 1.06 | [0.71, 1.42] |
| | Low | 4 | 275 | 0.04 | [−1.30, 1.39] |
| | Perceptual richness | | | | 15.3, $p < .001$ |
| | Yes | 2 | 100 | −0.27 | [−0.72, 0.18] |
| | No | 6 | 377 | 0.80 | [0.52, 1.08] |
| **Zapamatování** | Instructional guidance | | | | 106.5, $p < .001$ |
| | High | 31 | 4,531 | 0.90 | [0.81, 0.99] |
| | Low | 22 | 2,609 | 0.19 | [0.08, 0.29] |
| | Perceptual richness | | | | 36.4, $p < .001$ |
| | Yes | 12 | 1,395 | 0.28 | [0.14, 0.41] |
| | No | 34 | 4,723 | 0.77 | [0.69, 0.85] |

# Efektivita učebních pomůcek Carbonneau a kol. (2013)

**Transfer**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Instructional time | | | | | 3.6, $p = .06$ |
| ≤14 days | 7 | 1,625 | 0.03 | [−0.13, 0.21] | |
| 15–45 days | 6 | 1,828 | 0.22 | [0.07, 0.37] | |

**Řešení**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Group vs. individual | | | | | |
| Individual | 0 | | | | |
| Group | 9 | 477 | 0.46 | [0.23, 0.68] | |
| Instructional time | | | | | 22.7, $p < .001$ |
| ≤14 days | 6 | 290 | $0.86_a$ | [0.56, 1.16] | |
| 15–45 days | 1 | 76 | $-0.62_b$ | [−1.17, −0.62] | |
| ≥46 days | 2 | 111 | $0.25_a$ | [−0.19, 0.69] | |

**Zapamatování**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Group vs. individual | | | | | 0.02, $p = .87$ |
| Individual | 5 | 481 | 0.57 | [0.31, 0.82] | |
| Group | 48 | 6,659 | 0.59 | [0.52, 0.66] | |
| Instructional time | | | | | 7.4, $p = .02$ |
| ≤14 days | 25 | 3,133 | $0.59_a$ | [0.49, 0.69] | |
| 15–45 days | 15 | 1,261 | $0.35_b$ | [0.21, 0.49] | |
| ≥46 days | 7 | 952 | $0.49_{ab}$ | [0.28, 0.71] | |

# Vývoj matematického usuzování, nekognitivní aspekty

Muryama a kol. (2013): longitudinální analýza dětí mezi 5.-10. třídou.

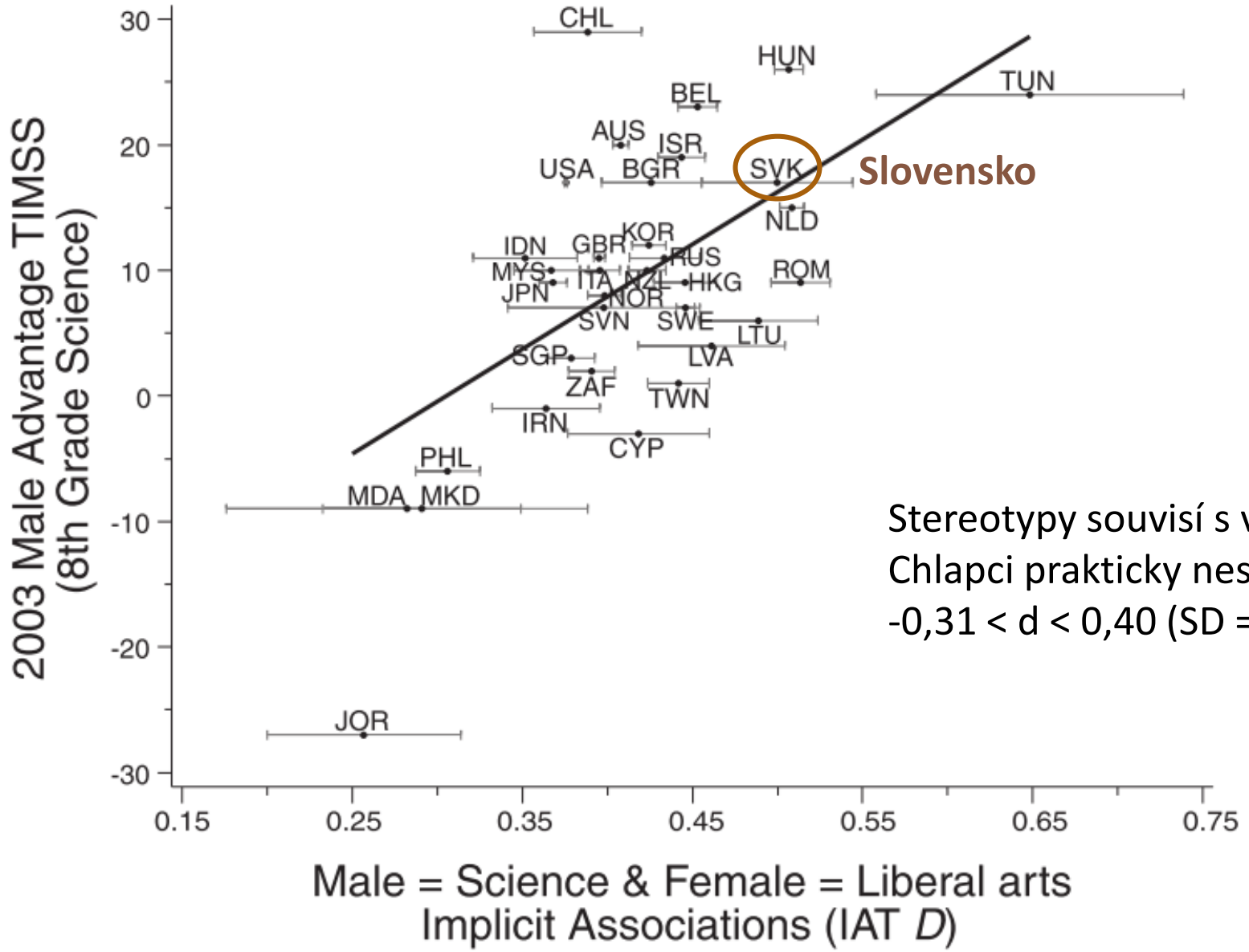
- Inteligence vysvětlila intercept vývojové křivky, nikoli sklon.
- Rychlost učení vysvětlily motivace a kognitivní strategie, nikoliv inteligence.

**Matematická úzkostnost**, matematické self-efficacy (Kubešová, 2019)

**Emoce ve výuce** (moderují matematický výkon; McLeod, 1992).

Předpoklady se neliší dle pohlaví či rasy, jiné důvody (Jacobs, 2005).

Nosek a kol. (2009): mezinárodní studie **genderových stereotypů** (IAT) a skutečného rozdílu ve výkonu mužů a žen v testu TIMSS.




Stereotypy souvisí s výkonem, $\beta = 0{,}63^{***}$.
Chlapci prakticky neskórujú lépe než dívky:
$-0{,}31 < d < 0{,}40$ (SD = 0,15).

Nosek a kol. (2009)

# Jak ale lidé k řešení matematických úloh dospějí?

# Kognitivní procesy vedoucí k řešení

**Rutinní vs. nerutinní problém**

- *„Kvantitativní myšlení o kvalitativních problémech.“*
  - (Mayer a kol., 1992).

Mayer (1994): Model reprezentace problému.

- **Překlad.**
- **Integrace.**
- Plánování.
- Provedení postupu.

Strategie **přímého překladu** vs. **tvorba modelu**.

# Hypotéza konzistentního jazyka

**Konzistentní:** Petr má o 5 korun více než Pavel. **Pavel má 10 korun.** Kolik korun má Petr?

**Nekonzistentní:** Petr má o 5 korun více než Pavel. **Petr má 10 korun.** Kolik korun má Pavel?

**Příznakovost.**

- Sčítání vs. odčítání, násobení zlomkem 2/3 vs. 3/2.

# Typické chyby v matematice

**Racionální omyl** (Ben-Zeev, 1995; 1996): Chybná indukce pravidel.

- např. $\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{2}{5}$

Analogické usuzování, **chybný transfer** informace.

- Transfer znalostí nefunguje tak jednoznačně, jak se obecně soudí.
  - (Viz Thorndikovy, 1922, experimenty s obsahem geometrických obrazců.)
- Hejného metoda?

**REASON** model (Ben-Zeev, 1998) vysvětluje právě chybu v analogii a uplatnění jinde správného pravidla na neadekvátní kontext.

# Jak ale „numerace“ vzniká? Jak se vyvíjí?

# Kulturně--kognitivní přístup

Jak se rozvíjejí matematické představy?

Jak vzniká mentální reprezentace čísla a množství?

Antropologické studie,
vývojová psychologie.

https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Pirahas_of_Brazil.jpg

# Vývoj matematických představ

**Thorndike** (1921): Dril v aritmetice, **transfer** dovedností.

**Piaget** (a Szeminska, 1952): konstruktivismus
- (resp. strukturalismus).

**Gelman a Gallistel** (1979): Počátek moderních přístupů.

Moderní přístupy, kognitivní i nekognitivní aspekty.

# Posouzení množství

Domorodci kmene Pirahã (Brazílie)

- Žádné jazykové kvantifikátory kromě „jeden/více než jeden “.
- Přesto rozlišují různá množství, pokud však není nutné zapojit paměť
- Podněty musí být prezentovány současně (a nebo v těsném sledu).
- Dokáží dokonce provádět jednoduché matematické operace.

Závěry: jazyk a výrazy pro čísla neovlivňují vjem množství jako takový, ale jsou „technologií“ pro jeho transfer v čase a prostoru.

- Frank a kol. (2008), Gordon (2004), Everett (2005, 2016).
- *„... čísla mohou být spíše chápána jako vynález: Kognitivní technologie pro reprezentaci, uchovávání a manipulaci s exaktními, kardinálními množinami prvků.“* (Frank a kol., 2008, s. 823)

# Od enumerace k numeraci

Pět pravidel podle Gellmana a Galistela (1979):

- 1. „one-to-one correspondence“;
- 2. pořadí čísel je neměnné ;
- 3. počítání je kardinální;
- 4. počítání je abstraktní;
- 5. prvky lze počítat v libovolném pořadí.

Zpravidla v 5 letech, ale chyby v doplňkových dovednostech:

- 6. počítání probíhá vždy z jedné strany na druhou (NE!);
- 7. je vždy nutné počítat sousedící prvky (NE!).

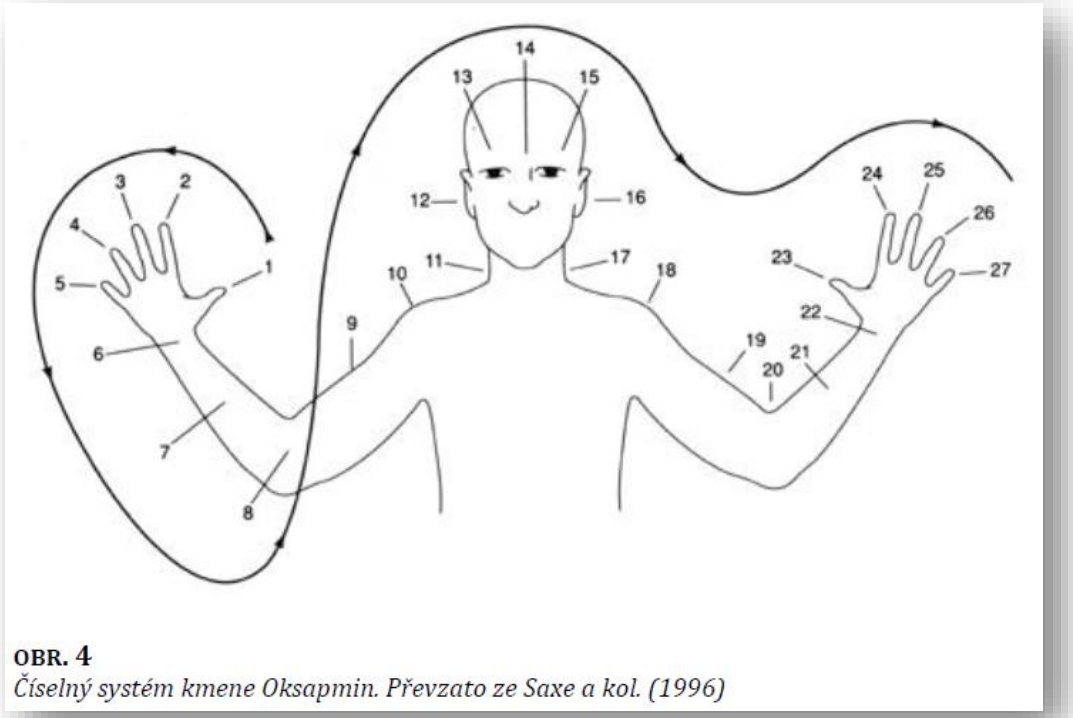
# Od enumerace k numeraci

Saxe (1982) zkoumal tribální kmen Oksapmin z Papui.

- Prearitmetická práce s čísly.
- Většina kmene negramotná.

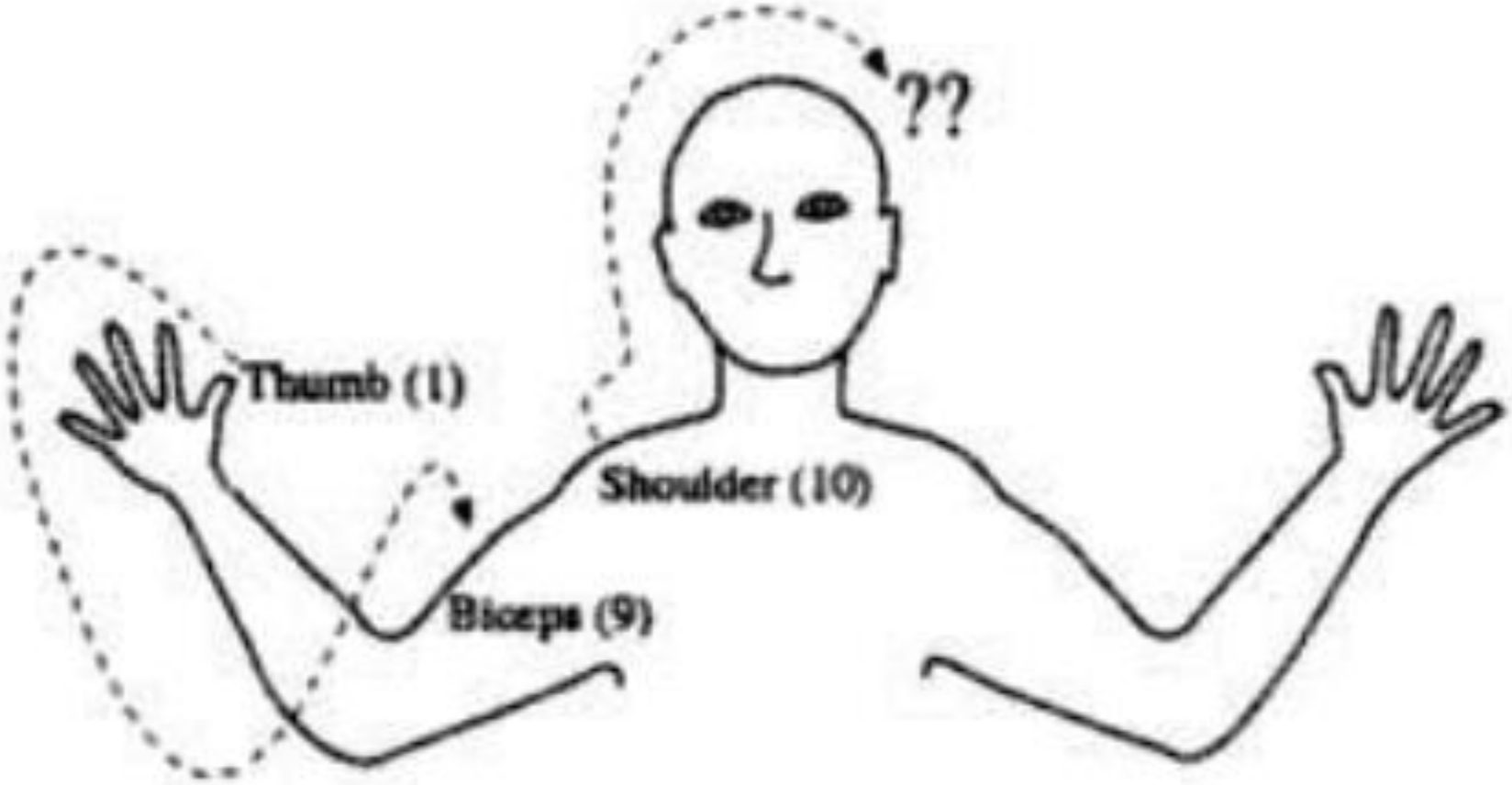
Příklad 9+7:

**Jak bude Oksapmin postupovat?**




**OBR. 4**
*Číselný systém kmene Oksapmin. Převzato ze Saxe a kol. (1996)*

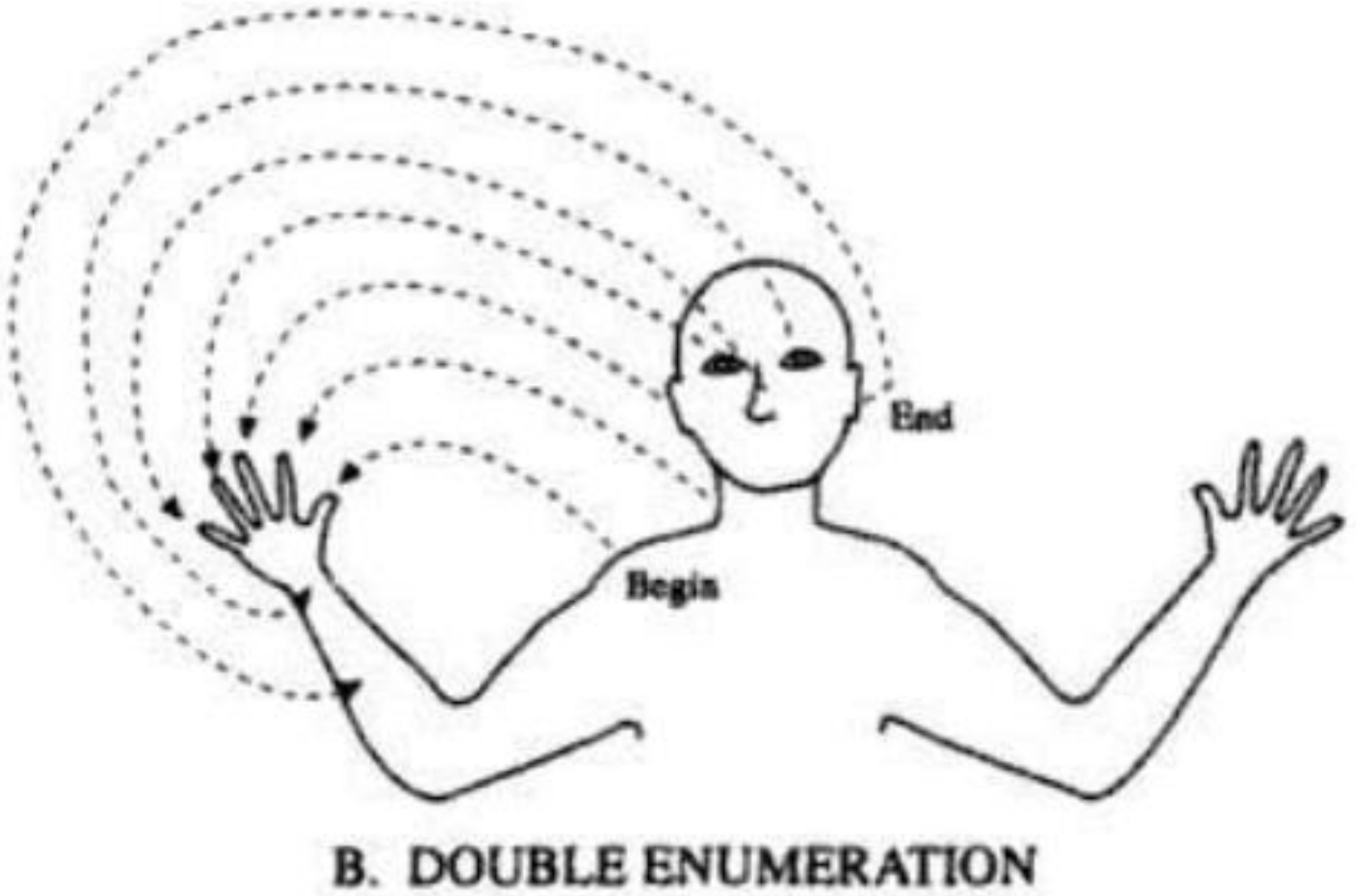
9+7




A. GLOBAL ENUMERATION

Saxe (in Cígler, 2018)

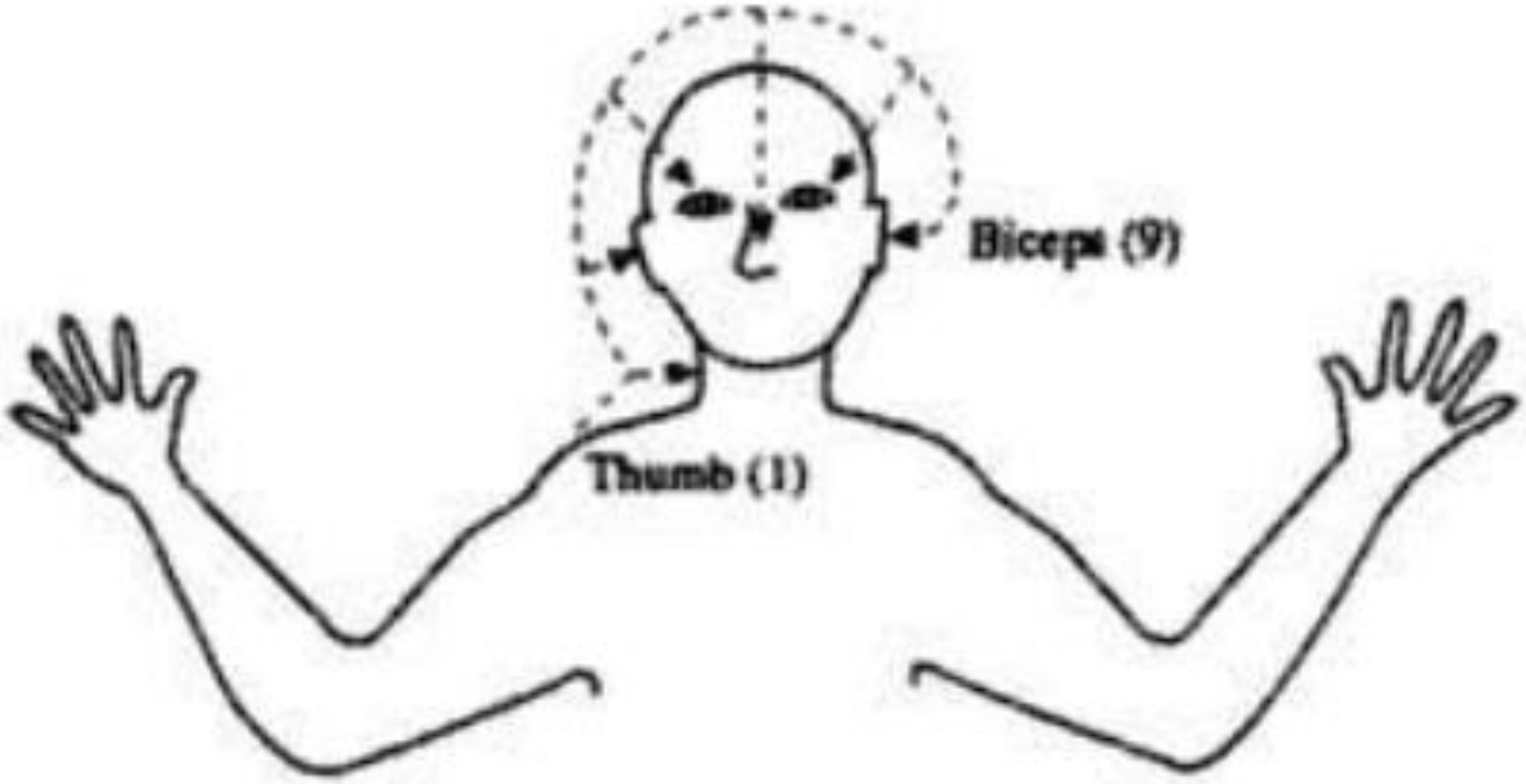
9+7




B. DOUBLE ENUMERATION

Saxe (in Cígler, 2018)

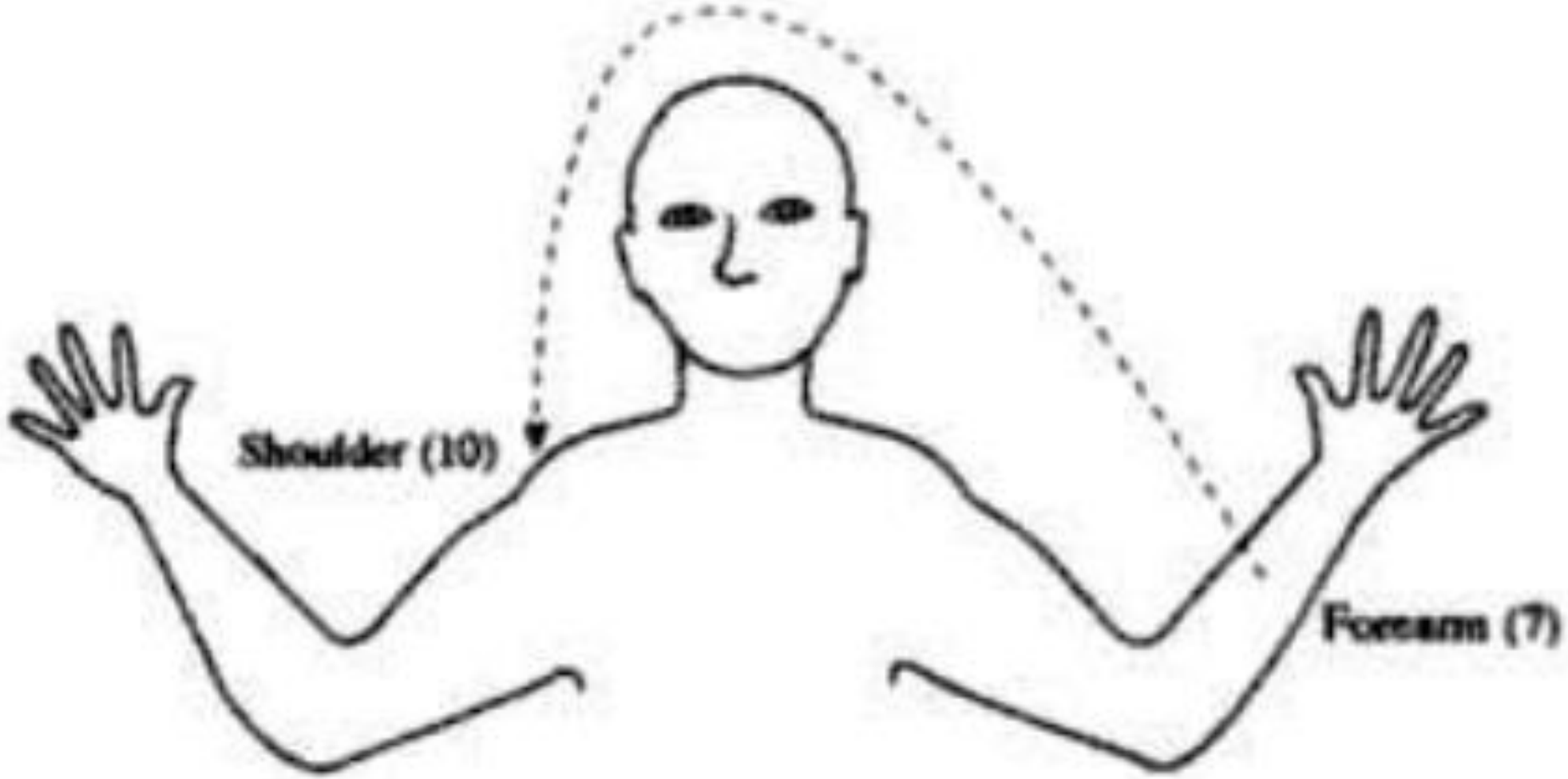
9+7




C. BODY SUBSTITUTION

Saxe (in Cígler, 2018)

9+7




D. HALVED BODY PROCEDURE

Saxe (in Cígler, 2018)

# Od enumerace k numeraci

Osvojování si aritmetiky probíhá stejně ve všech kulturách.

- Jen jiné tempo (Piantadosi a kol., 2014; Butterworth a kol., 2008).

Označení čísel ovlivňuje základní aritmetické operace, typické chyby i chápání množství.

- S rostoucí mírou „profesionality“ a abstraktnosti reprezentace se vliv stírá.
- Rozdíl mezi asijskými a euroamerickými dětmi v PISA, TIMSS atd. nemusí být způsobem motivací či výukou, ale i kulturními rozdíly (v pozdějším věku se rozdíly zmenšují).

# Vliv pravidel-nosti číselného systému

*a) From one to ten*

| Arabic Numeral | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Chinese (written) | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 六 | 七 | 八 | 九 | 十 |
| Chinese (spoken) | yī | èr | sān | sì | wǔ | liù | qī | bā | jiǔ | shí |
| Korean Formal | il | i | sam | sa | o | yeuk | chil | pal | ku | sip |
| Korean Informal | hana | dool | set | net | dasut | yusut | ilgob | yudulb | ahob | yul |
| English | one | two | three | four | five | six | seven | eight | nine | ten |
| German | eins | zwei | drei | vier | fünf | sechs | sieben | acht | neun | zehn |
| Italian | uno | due | tre | quattro | cinque | sei | sette | otto | nove | dieci |
| Spanish | uno | dos | tres | cuatro | cinco | seis | siete | ocho | nueve | diez |
| French | un | deux | trois | quatre | cinq | six | sept | huit | neuf | dix |
| Latin | unus,-a,-um | duo,-ae,-a | tres,tria | quattuor | quinque | sex | septem | octo | novem | decem |
| Roman Numeral | I | II | III | IV | V | VI | VII | VIII | IX | X |

*b) Eleven to twenty*

| Arabic Numeral | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Chinese (written) | 十一 | 十二 | 十三 | 十四 | 十五 | 十六 | 十七 | 十八 | 十九 | 二十 |
| Chinese (spoken) | shí yī | shí èr | shí sān | shí sì | shí wǔ | shí liù | shí qī | shí bā | shí jiǔ | èr shí |
| Korean Formal | sip il | sip i | sip sam | sip sa | sip o | sip yeuk | sip chil | sip pal | sip ku | i-sip |
| Korean Informal | yul hana | yul dool | yul set | yul net | yul dasut | yul yusut | yul ilgob | yul yudulb | yul ahob | sumul |
| English | eleven | twelve | thirteen | fourteen | fifteen | sixteen | seventeen | eighteen | nineteen | twenty |
| German | elf | zwölf | dreizehn | vierzehn | fünfzehn | sechzehn | siebzehn | achtzehn | neunzehn | zwanzig |
| Italian | undici | dodici | tredici | quattordici | quindici | sedici | diciassette | diciotto | diciannove | venti |
| Spanish | once | doce | trece | catorce | quince | diez y seis | diez y siete | diez y ocho | diez y nueve | veinte |
| French | onze | douze | treize | quatorze | quinze | seize | dix-sept | dix-huit | dix-neuf | vingt |
| Latin | undecim | duodecim | tredecim | quattuordecim | quindecim | sedecim | septendecim | octodecim | undeviginti | viginit |
| Roman Numeral | XI | XII | XIII | XIV | XV | XVI | XVII | XVIII | XIX | XX |

Miller a Paredes (1996)

# Vliv pravidelnosti číselného systému

**3–5leté děti**

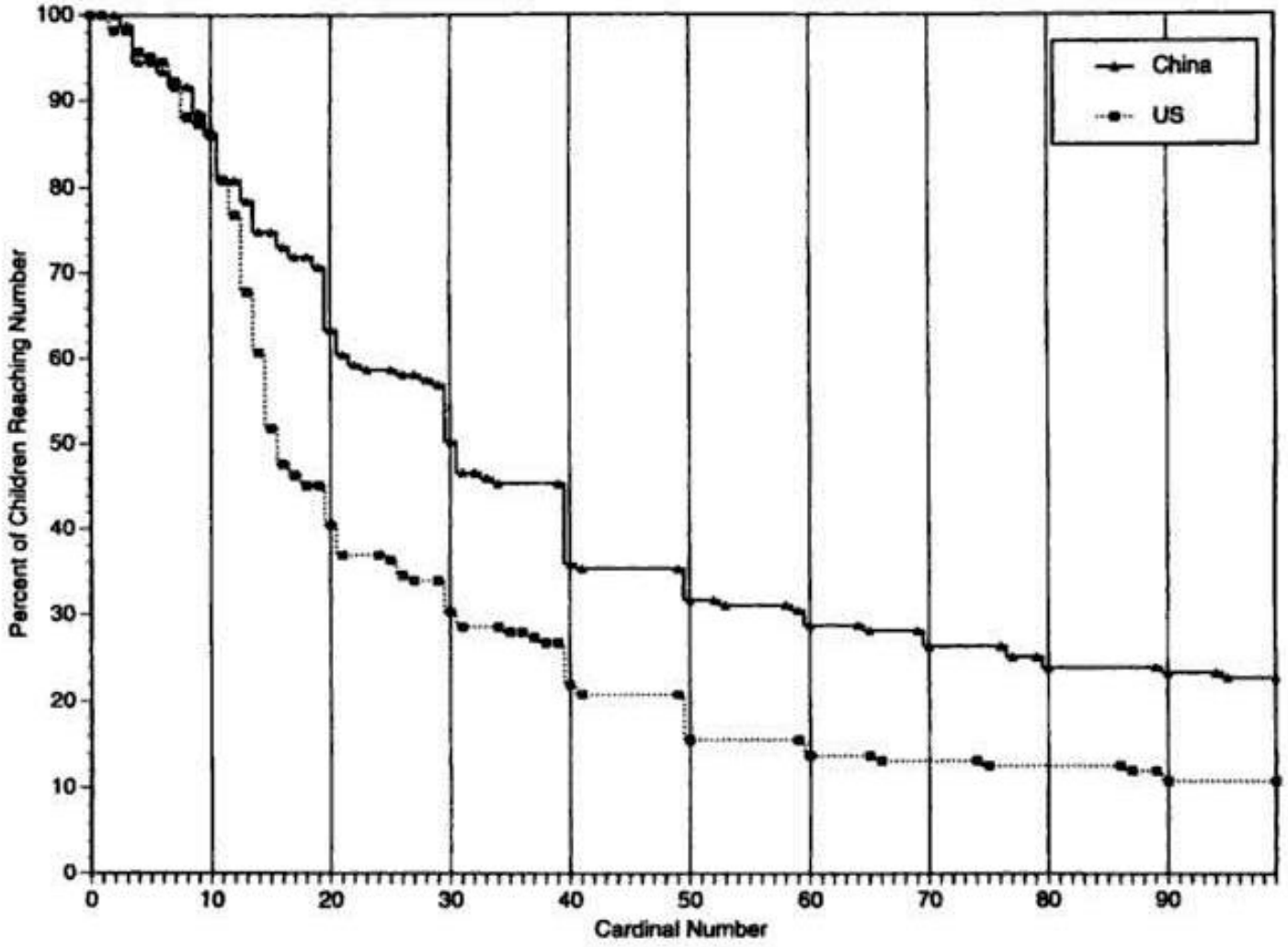



FIG. 4.4. Percentage of a group of 3–5-year-old children reaching each number in abstract counting, by country. The difficulty U.S. children have in mastering the teens portion of English number names is shown by their substantial dropoff during this region.

Miller a Paredes (1996)

# Vliv pravidelnosti číselného systému

**neuronová síť**

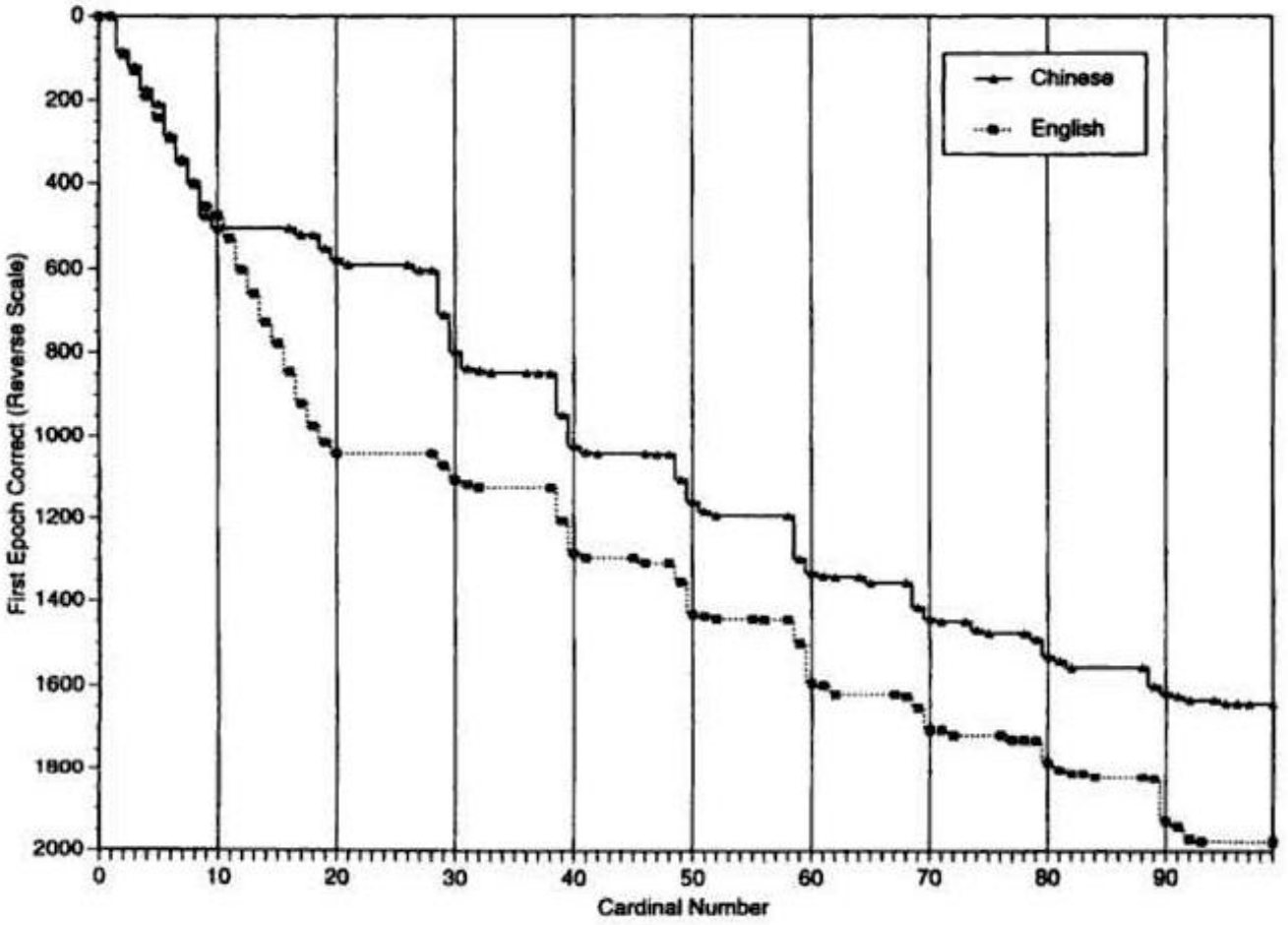



FIG. 4.5. Performance of a morphology-based neural-network model trained to count in Chinese and English. First epoch to produce a number is shown; to facilitate comparision with the previous figure, this is plotted on a reverse axis. The model reproduces the most prominent phenomena shown in children's behavior: (a) similar performance before 10, a larger dropoff for English in the teens, and a scalloped profile of difficulty at decade boundaries for both languages in the range from 20-99.

Miller a Paredes (1996)

# Transfer číslicového systému

☐ **Near miss:** ±2 od správné odpovědi.

● **Expansion:** Chybný počet číslic.

▲ **Reverse:** jednotky druhého sčítance přičteny k desítkám prvního.

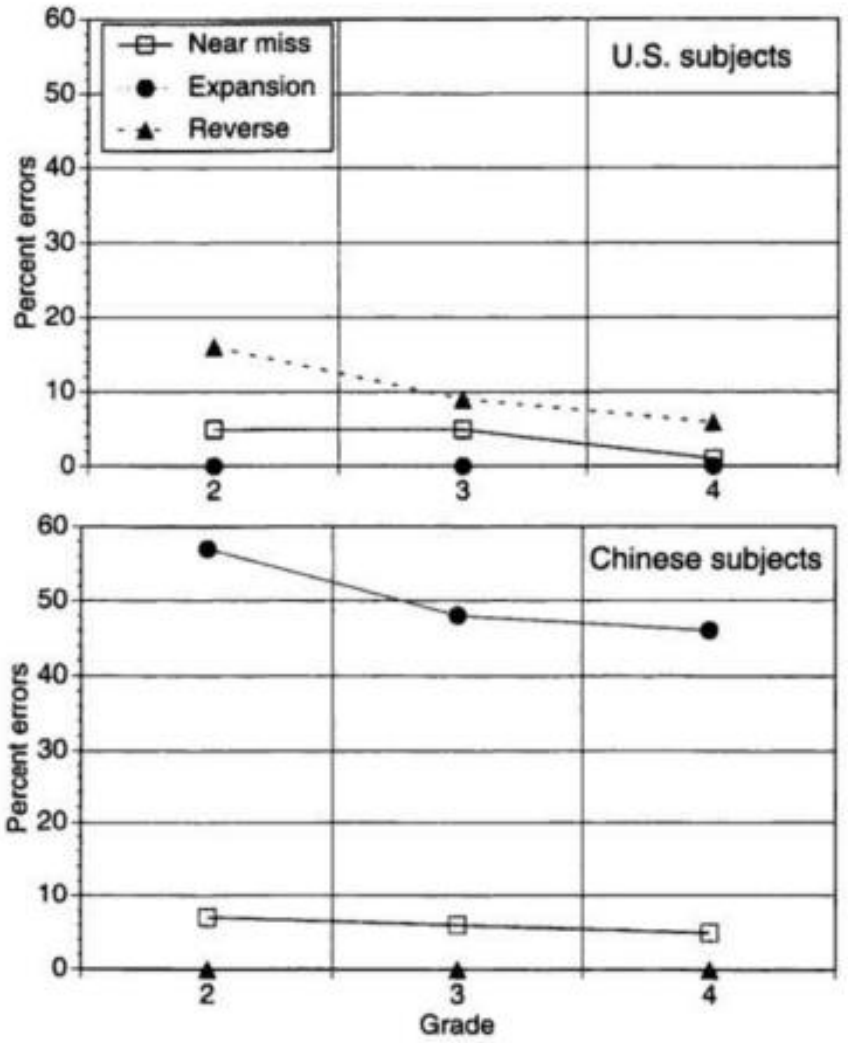



FIG. 4.9. Errors on the word/character format addition task. Errors were coded into (a) Near misses (within ±2 on both digits of answer, and correct number of digits); (b) Expansions (in which the answer contained the wrong number of digits); and (c) Reverses (in which the units portion of one addend was added to the tens portion of the other). Error profiles differed substantially across countries and reflected the nature of the orthography used.

Miller a Paredes (1996)

# dospělí

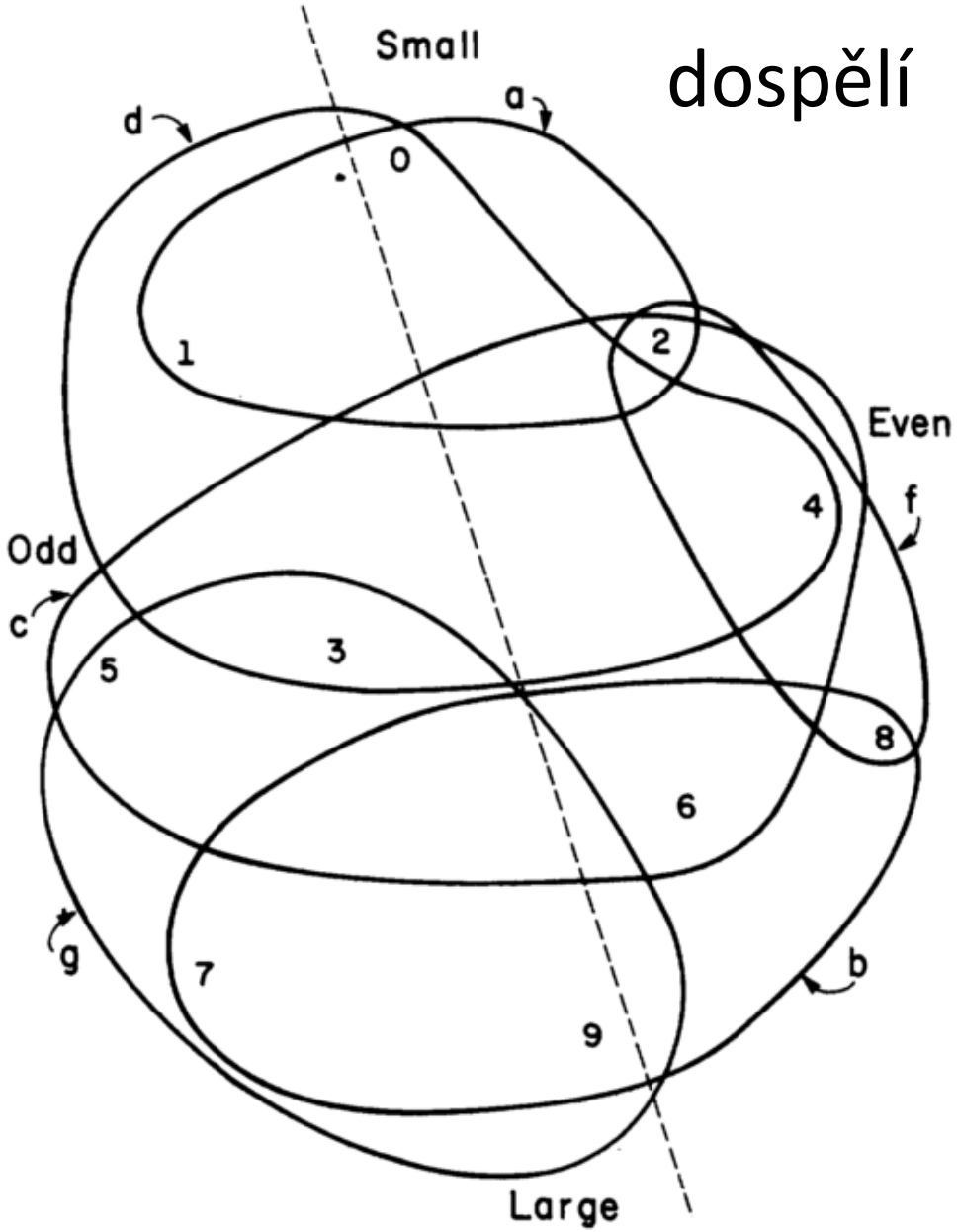



TABLE 3

INDCLUS SOLUTION FOR NUMBER-SIMILARITY JUDGMENTS: WEIGHTS FOR DIFFERENT SUBSETS BY AGE GROUP

| Subset | Kinder-garten | Third Grade | Sixth Grade | Adult | Elements of Subset | Interpretation |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *a* | .585 (1) | .609 (1) | .451 (1) | .391 (2) | 0,1,2 | Small numbers |
| *b* | .477 (2) | .479 (2) | .374 (2) | .315 (3) | 6,7,8,9 | Large numbers |
| *c* | .343 (3) | .380 (3) | .303 (4) | .184 (5) | 2,3,4,5,6 | Middle numbers |
| *d* | .298 (4) | .319 (4) | .187 (6) | .163 (6) | 0,1,3,4 | Small numbers, excluding 2 |
| *e* | .267 (5) | .288 (5) | .155 (7) | .070 (7) | 4,5,6,7 | Moderately large numbers |
| *f* | .135 (6) | .017 (7) | .337 (3) | .493 (1) | 2,4,8 | Powers of 2 |
| *g* | .020 (7) | .064 (6) | .228 (5) | .283 (4) | 3,5,7,9 | Odd numbers, excluding 1 |
| Additive constant | .234 | .210 | .242 | .269 | ... | ... |
| Variance accounted for (VAF) (%) | 80.4 | 82.2 | 82.0 | 64.0 | ... | 78.0 (Total VAF) |

NOTE.—Rank of weight is given in parentheses.

Pořadí vývoje stejné u amerických i čínských dětí.

- Malé-velké → liché-sudé

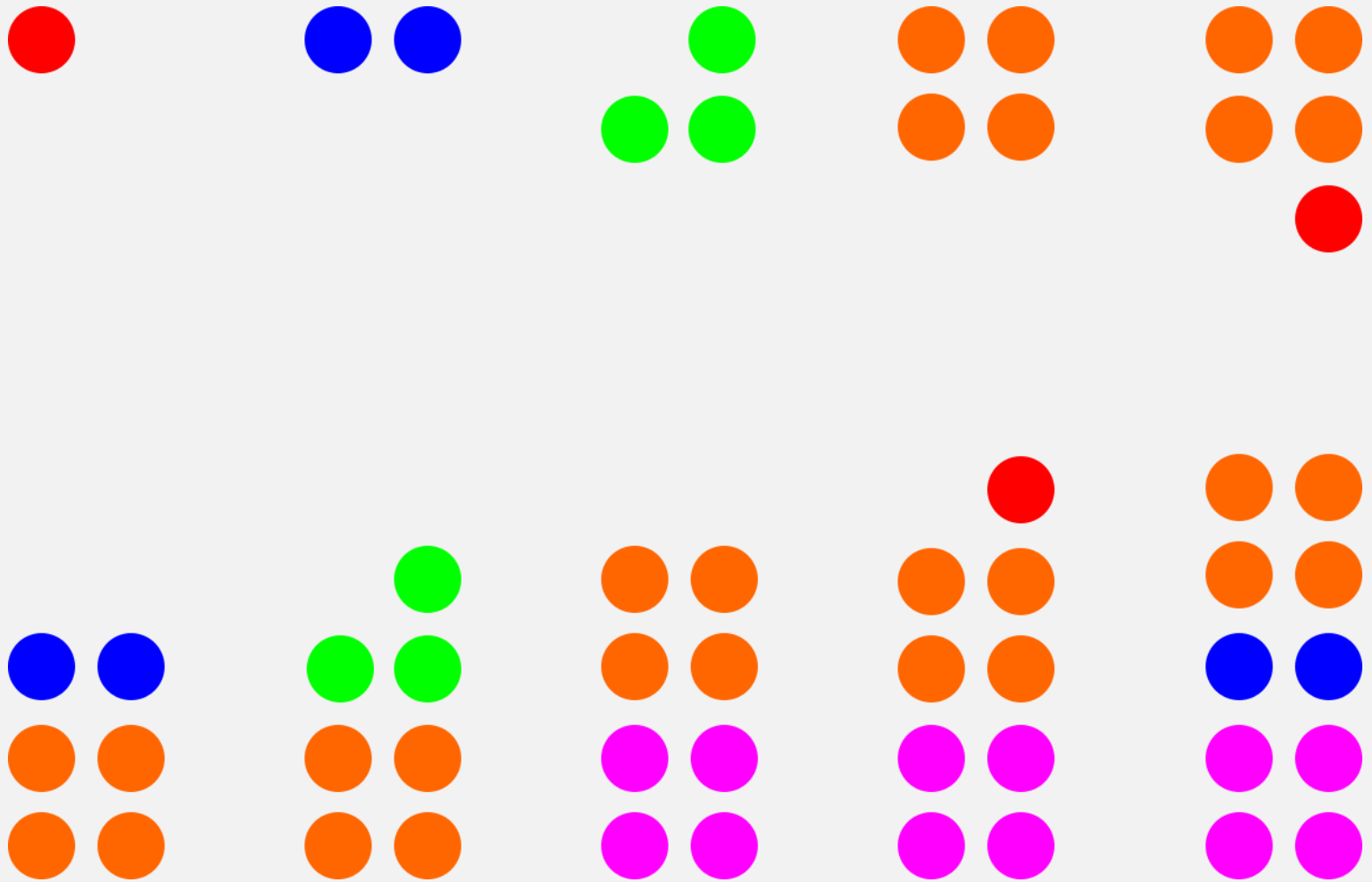
(Miller & Gelman, 1983)

# Proč tomu ale tak je? Nakolik jsou matematické koncepty logické (a naučené), nakolik jsou vrozené?

# Kognitivní přístup

Jaké kognitivní procesy jsou na intraindividuální úrovni zodpovědné za řešení vybraných matematických úloh?

Kognitivní věda, neuropsychologie.

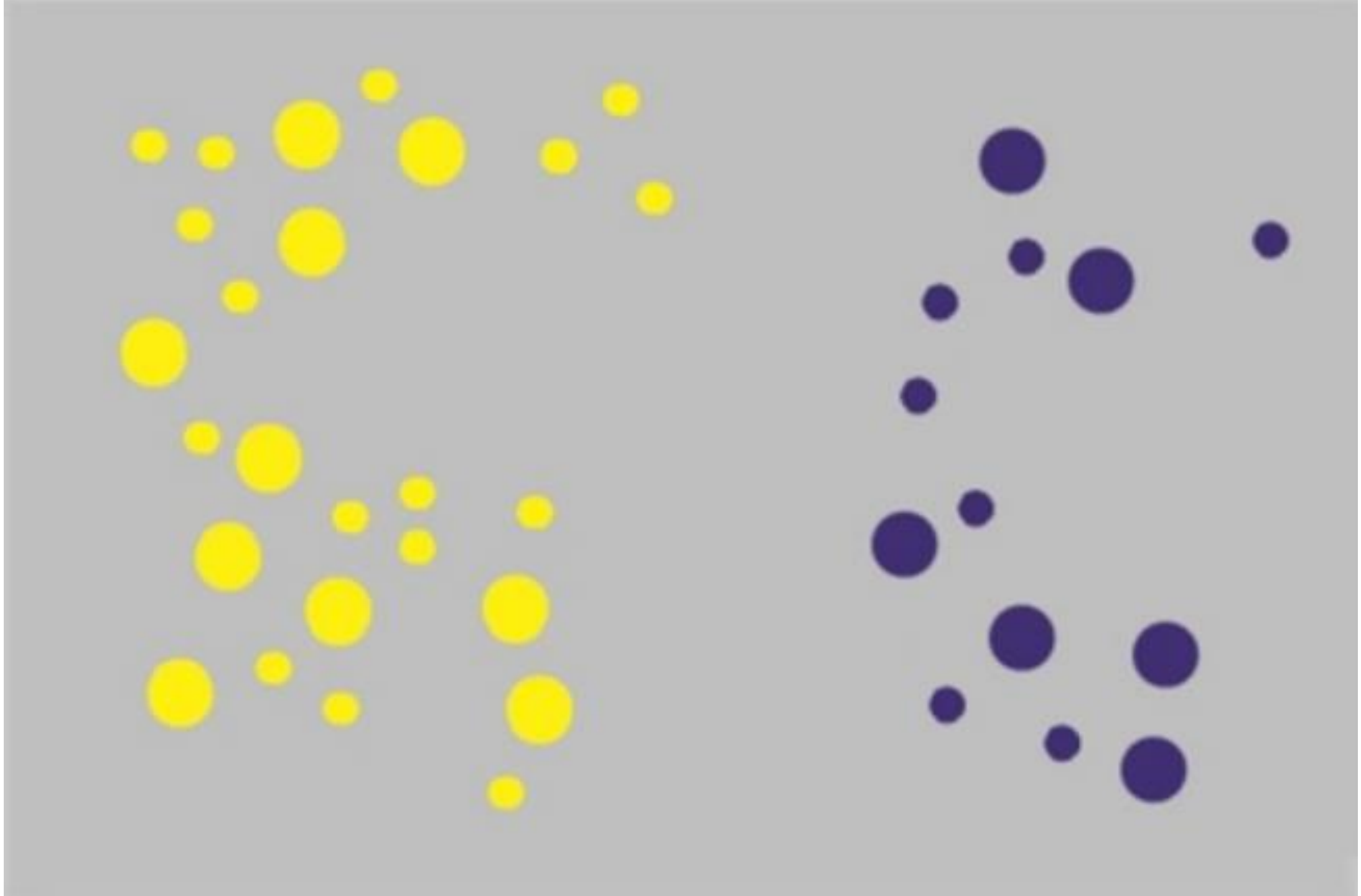


Nyní se objeví zaměřovací kříž.
Upřete na něj zrak.

Následně se objeví dvě množiny objektů.
**Na které straně je více?**

+

1

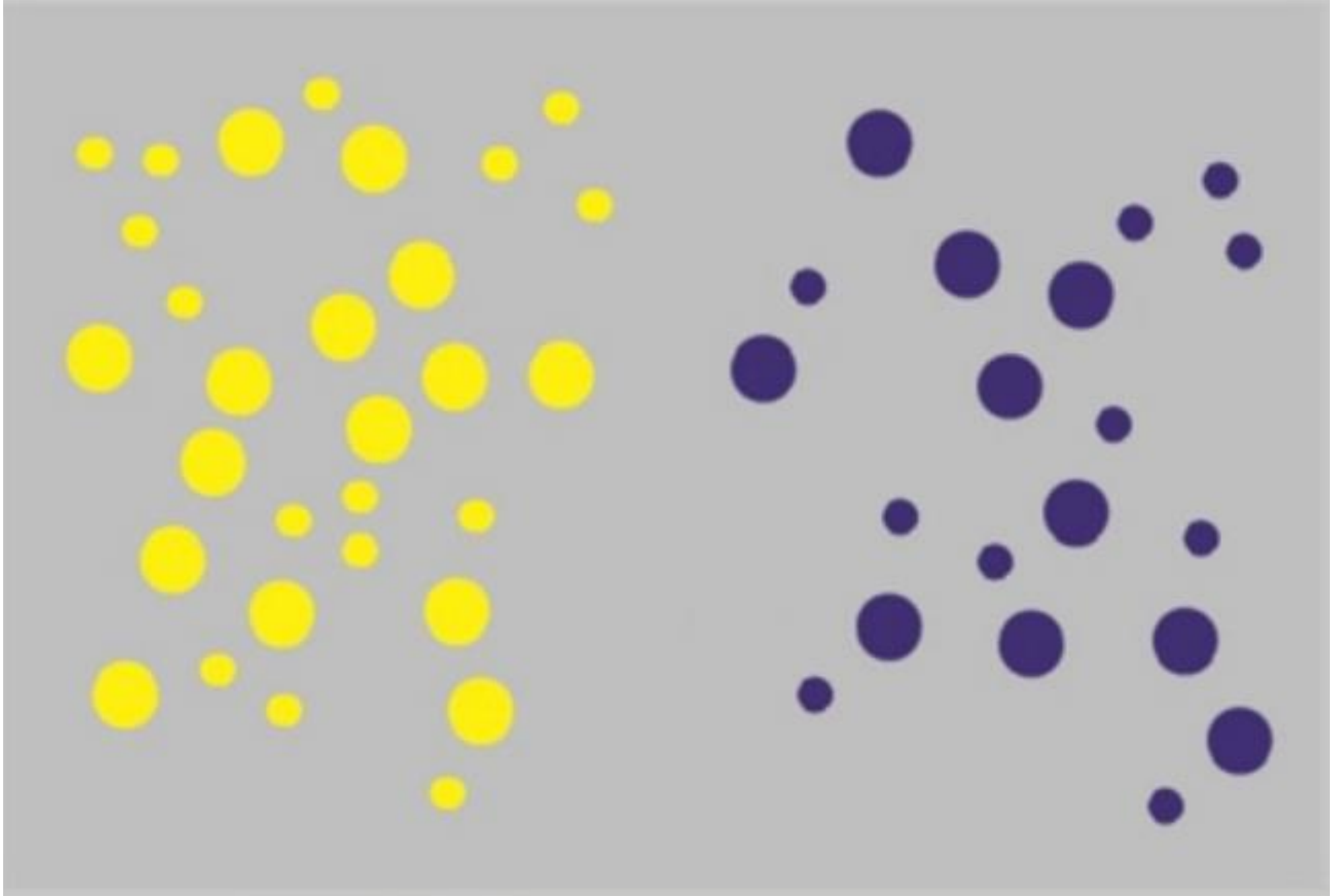


2

2

+

2

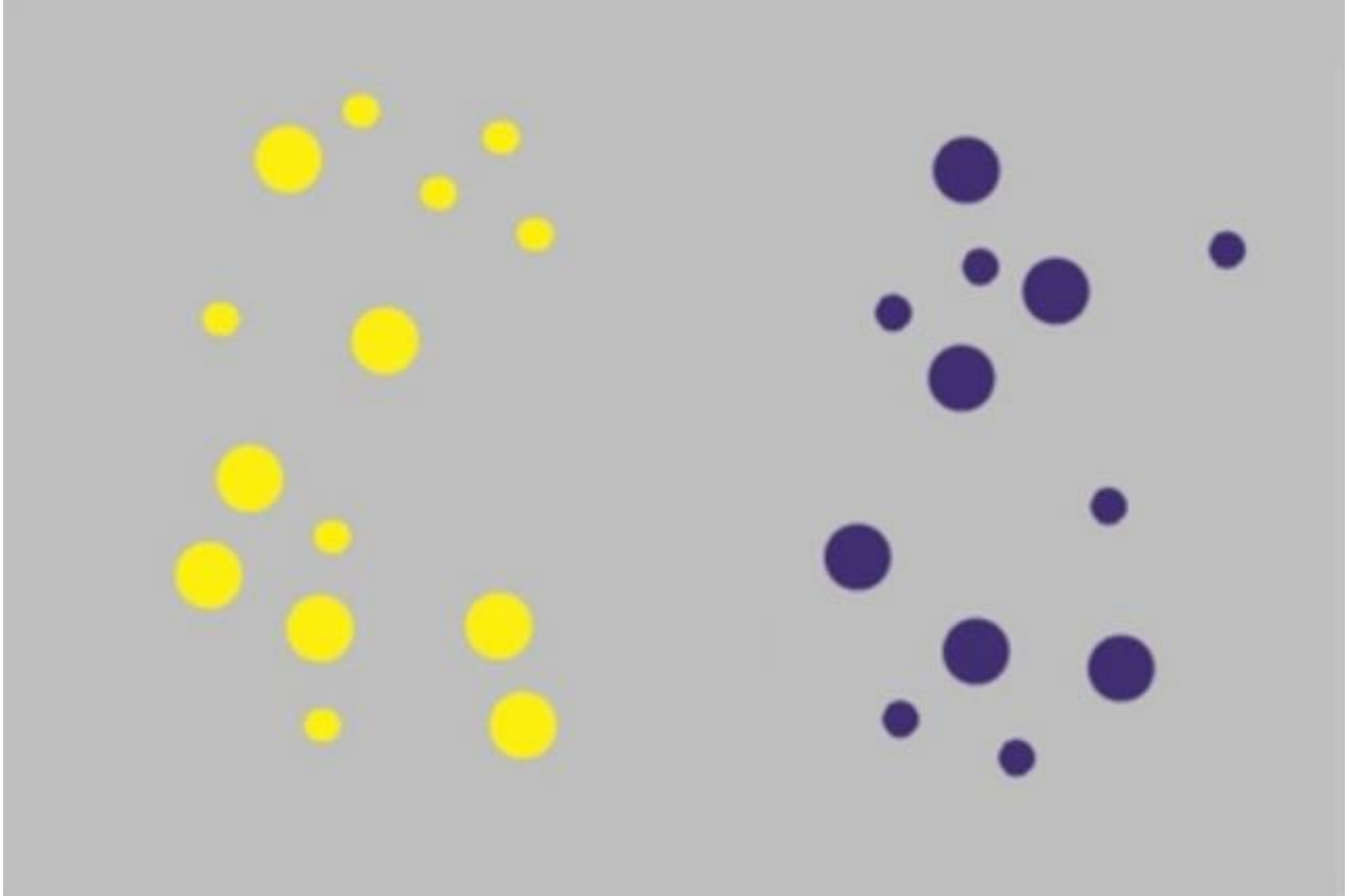


3

3

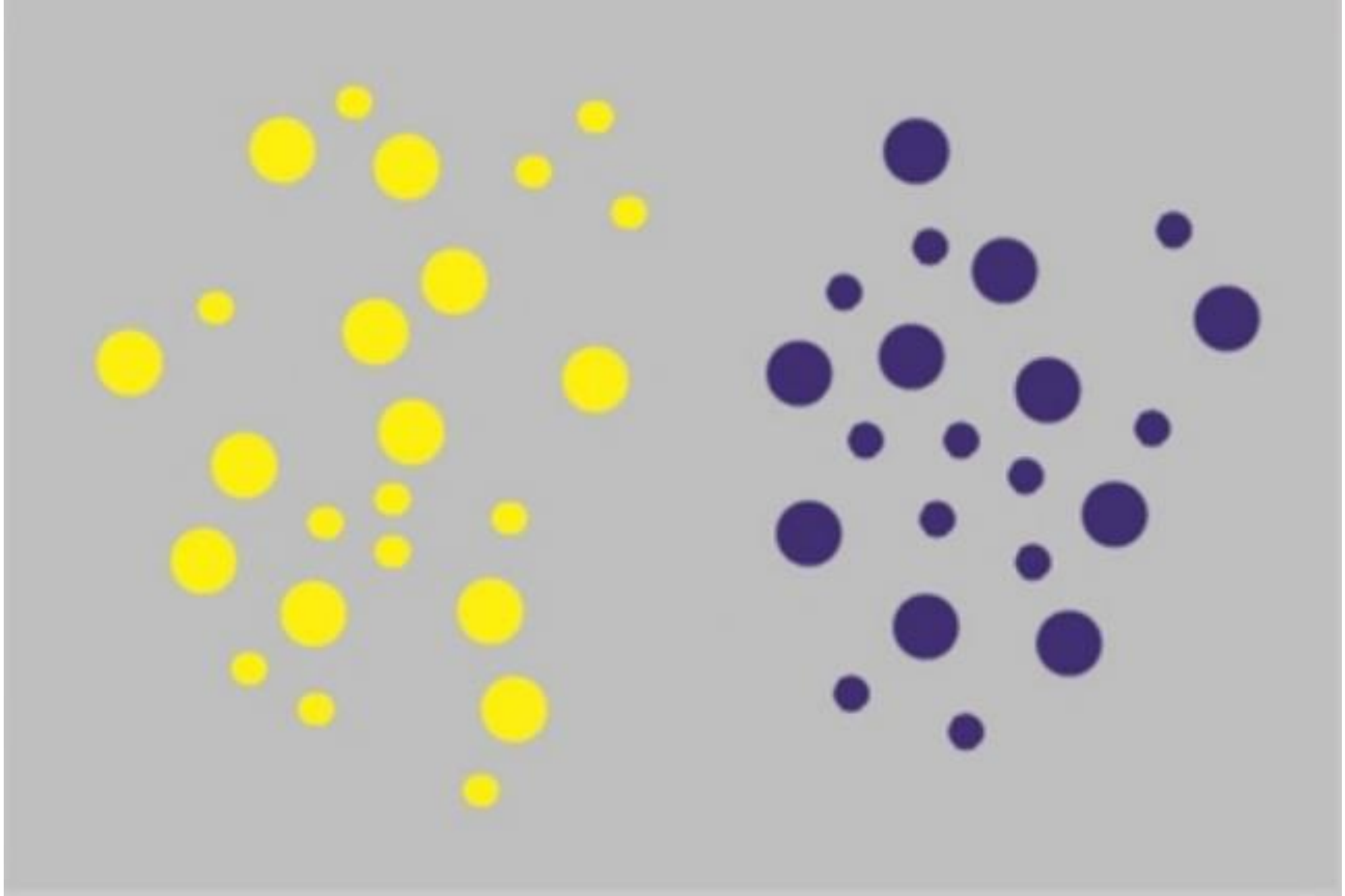
+

3



4

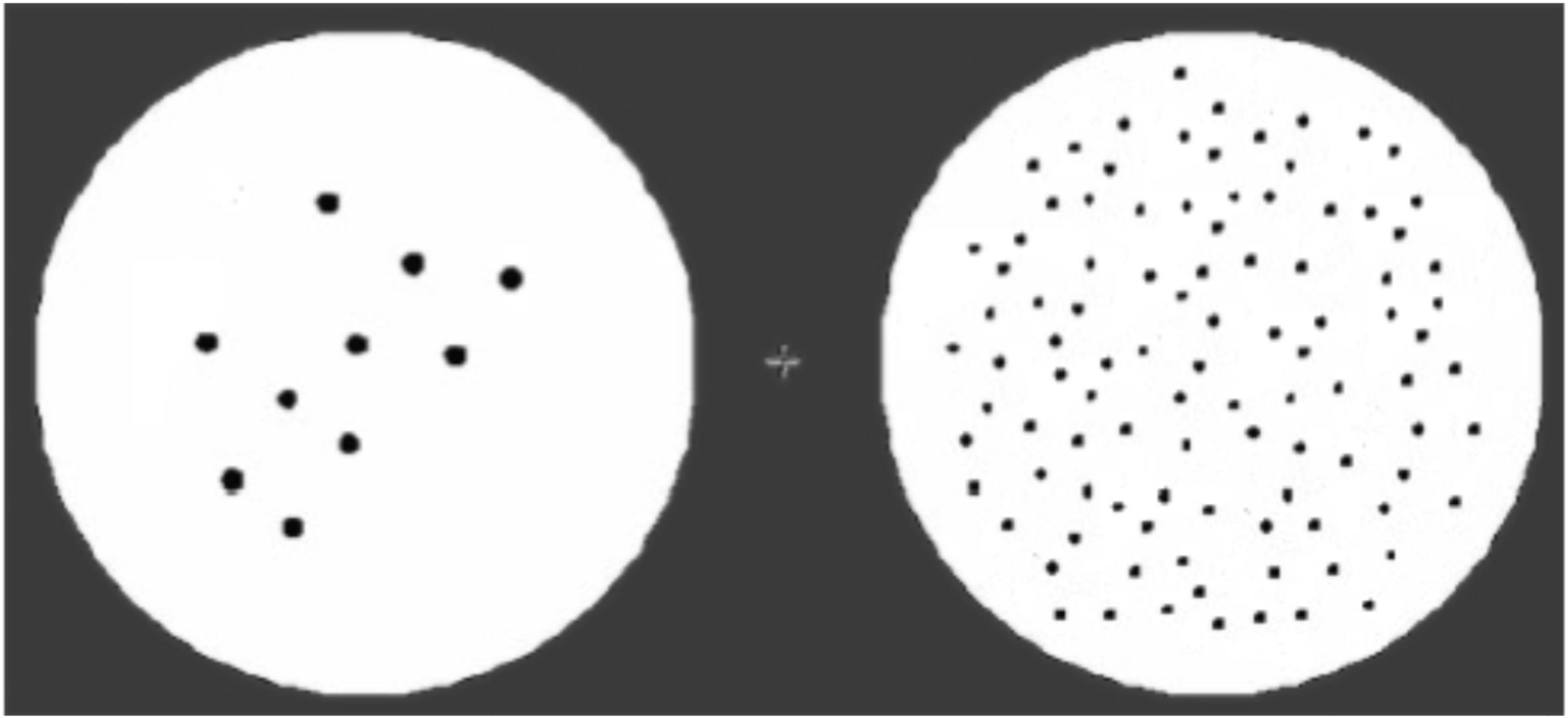
4

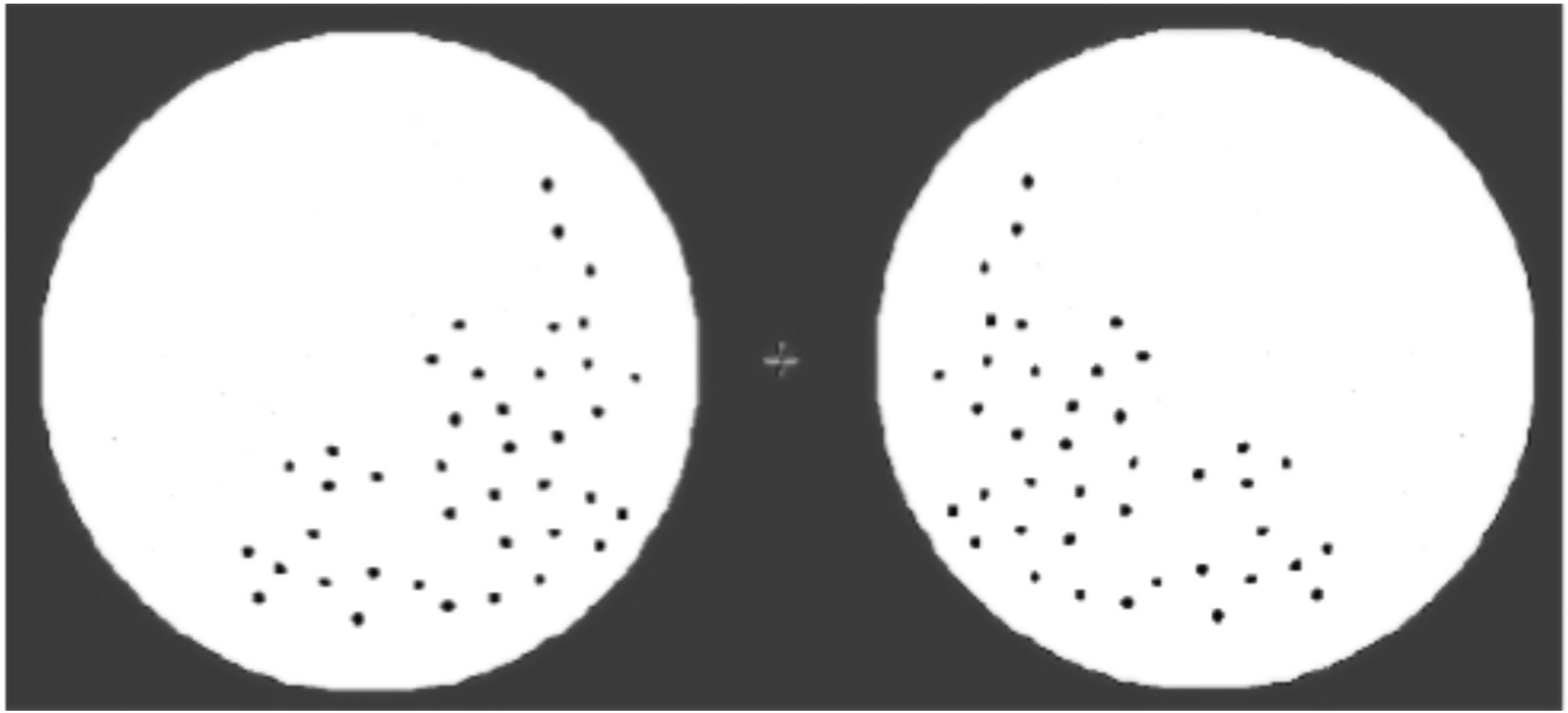


Nyní se opět objeví zaměřovací kříž.

Upřete na něj zrak.

Následně upřeně sledujte kříž na obrazcích, nesoustřeďte se na objekty kolem.





(Burr a Ross, 2008)

# Object tracking system (OTS), subitizing

paralelní, 4±0 objektů (Jevons, 1871).

3. trimestr těhotenství
(Antell a Keating, 1983; Schleger a kol., 2014)

kardinalita neimplikuje ordinalitu (Picozzi a kol., 2010)

nezávislý na senzorické modalitě (Izard, 2009)

malé interindividuální rozdíly, nesouvisí s aritmetikou
(Ceulemans a kol., 2015)

závislost na pozornosti (Burr a kol., 2010)

# Aproximate number system (ANS)

ANS: přibližný vjem většího množství.

OTS a ANS jsou disociované, obtížný přechod

- (Feigenson a kol., 2004).
- Diskontinuita při diferenciaci u kojenců (Coubart a kol., 2014)
- Disociace klesá s věkem (Feigenson a Carey, 2005), dospělí si mohou „volit“ (Agrillo a kol., 2015).

Kulturně nezávislé – ale ANS jako součást vizuálního systému a paměti nepřenositelný.

- „Číslo jako kognitivní technologie.“ (Frank a kol., 2008; Everett, 2005).
- U malých dětí proto souvisí s jazykem (Brysbaert a kol., 1998).

# Aproximate number system (ANS)

## Napříč fylogenetickým vývojem: evoluční význam

- (Agrillo, Piffer, & Adriano, 2013; Taves, 1941; Kaufmann et al., 1949; Gelman & Gallistel, 1978)

## Tzv. preverbální početní mechanismus

- (Meck a Church, 1983).

## Rozsahu numerické vzdálenosti

- (Haist et al., 2015; Piazza et al., 2010)

## Weberův-Fechnerův zákon.

# Aproximate number system (ANS)

## ANS jako prediktor budoucího výkonu a úspěchu v matematice

- (Gilmore, McCarthy, & Spelke, 2010; Halberda et al., 2008; Purpura & Logan, 2015; Starr, Libertus, & Brannon, 2013; Soto-Calvo et al., 2015)

## Zdá se, že existuje pozitivní efekt tréninku presymbolických numerických dovedností na výkon v aritmetických testech

- (Park & Brannon, 2014; Brannon et al., 2016; Binterová & Hošpesová, 2003; Binterová et al., 2005; Samková, 2013).

## Kauzalita (Feigenson, cit. dle Olmstead & Kuhlmeier, 2015)

- individuální rozdíly ve funkci ANS již v dětství (Libertus & Brannon, 2010)
- přesnost ANS predikující pozdější matematický výkon (Mazzocco et al., 2011)
- zlepšení formálních mat. schopností trénováním ANS (Park & Brannon, 2014; Park et al., 2016)

Podklady pro tento slide vytvořila Vendula Šamajová v rámci přípravy příspěvku Matematické usuzování a zpracování numerických podnětů z hlediska výzkumu i psychologické praxe prezentovaného na Kognitivní škole 2020.

# A co z toho všeho?

# Co si odnést?

Neexistují „buňky na matematiku“ přiměřeně nezávislé na „inteligenci“.

- Matematické, verbální a jiné usuzování se prakticky neliší.
- To se netýká aritmetiky a prostých „výpočtů“.
- Nelze studovat souvislosti matematických znalostí odděleně od intelektu.

Za rozdílem ve výkonu („nejde mi matematika, ale jinak jsem děsně chytrý!“) mohou nekognitivní aspekty – učitel, motivace, znalosti...

Rozdíly mezi muži a ženami jsou velmi malé a způsobené spíše kulturně-podmíněnými genderovými stereotypy

Matematická úzkostnost, mat. self-efficacy je důležitou proměnnou.

# Co si odnést?

Při hodnocení efektivity výukových pomůcek není třeba (a nelze) se spoléhat na intuici.

Příčiny chyby mohou být „racionální“.

Vliv formulace problému na jeho matematickou mentální reprezentaci.

Značná část lidského „chápání čísel“ je vrozená a fylogeneticky sdílená.

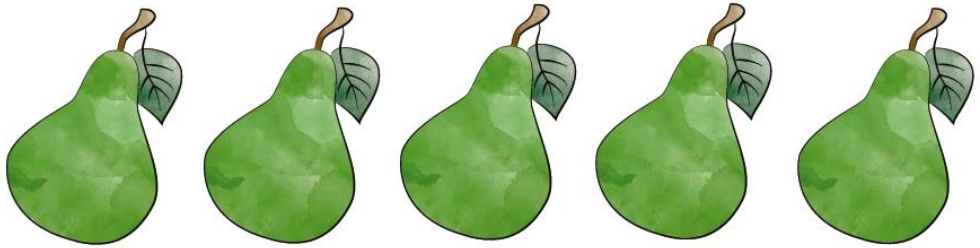
- ANS, OTS.

Při numerických operací se zapojují „nižší“ mozkové struktury.

Jsme schopni počítat „bez čísel“.

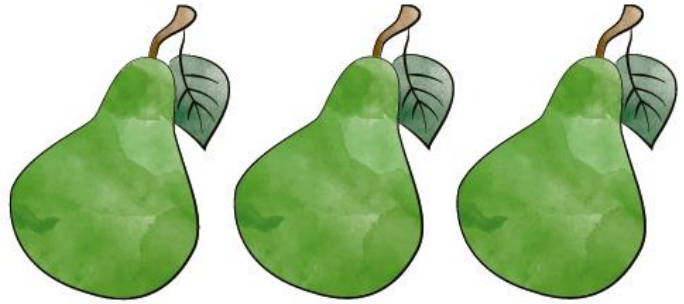
MUNI FSS Katedra psychologie

# Děkuji za pozornost!




Hynek Cígler

- cigler@fss.muni.cz
- Katedra psychologie,
  Institut pro výzkum dětí, mládeže a rodiny
- Fakulta sociálních studií,
  Masarykova univerzita
- psych.fss.muni.cz
- ivdmr.fss.muni.cz
- https://www.muni.cz/lide/175803-hynek-cigler


*„Kolik hrušek jsme dali do košíku?“*